AUTOMORFISMOS INTUICIONISTAS INTERVALARES

LIDIANE VISINTIN[1]; RENATA HAX SANDER REISER[1]

[1] *PPGC, CDTec/UFPel – {lvisintin,reiser}@inf.ufpel.edu.br*

1. INTRODUÇÃO

A Lógica Fuzzy(LF), também conhecida como Lógica Difusa, ou Nebulosa, introduz a habilidade em inferir conclusões e gerar respostas baseadas em informações vagas, ambíguas, qualitativamente incompletas e imprecisas. Neste contexto, os sistemas baseados em LF apresentam uma forma semelhante ao raciocínio humano, representando as expressões da linguagem natural de maneira flexível e intuitiva, levando à construção de sistemas inteligentes baseados em processos compreensíveis e de fácil manutenção.

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy introduzida em ZADEH(1965); generaliza a Teoria dos Conjuntos Clássicos, estendendo a relação dicotômica da relação de pertinência de um elemento a um dado conjunto. Ou seja, um subconjunto fuzzy A num conjunto universo X é definido em termos da função de pertinência μ:X→U, associando a cada x ϵ X um número $\mu_A(x)$ denominado grau de pertinência de x em A, e tal que $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$. Esta construção se estende às proposições na LF, que além de poder avaliar como completamente verdadeira ($\mu_A(x)=1$), ou completamente falsa ($\mu_A(x)=0$) uma proposição, também considera a noção de parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa. Neste contexto, tem-se na construção dual, a função de não-pertinência $\upsilon_A(x)$:X→U associada a conjuntos fuzzy, mas que ainda preserva o princípio do meio excluído, ou seja, $\mu_A(x)+\upsilon_A(x)=1$.

Novas e mais abrangentes extensões, baseadas na Teoria dos Conjuntos Fuzzy vem ampliando a modelagem da incerteza DUBOIS;PRADE(2000), onde pode ser citado a Lógica Fuzzy Intervalar (LFvI) ZADEH (1975), considerando os conjuntos fuzzy intervalares. E, outra relevante generalização também introduzida é a Lógica Fuzzy Intuicionista (LFI) ATANASSOV (1986,) ATANASSOV; GARGOV (1998).

Em particular consideramos a Lógica Fuzzy Intuicionista Intervalar (LFIvI) ATANASSOV; GARGOV (1989), motivados pela utilização destes estudos em diferentes áreas, veja BARROS; BASSANEZI (2006); CARLSSON; FULLER (2002), sendo que esta abordagem lógica integra os conceitos dos Conjuntos Fuzzy Intervalares e dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas. A LFIvI considera a modelagem da medida de imprecisão e incerteza no diâmetro do grau intervalar de pertinência. E, na LFI, tem-se a modelagem da hesitação relacionada com a construção dual da relação de pertinência, o que nos remete desigualdade dada pela diferença entre grau de pertinência intervalar e o grau de não pertinência intervalar menor ou no máximo igual a unidade. Assim, tal integração permite flexibilidade em operações complementares sobre conectivos da LFIvI.

O principal objetivo da etapa atual da pesquisa é estender o estudo dos automorfismos intuicionistas intervalares, visando à geração de novos conectivos da LFIvI. Este estudo considera as principais propriedades preservadas pela extensão intuicionista intervalar dos automorfismos. O comportamento e a ação destes automorfismos sobre a classe negações fuzzy é analisado. Tal abordagem será posteriormente estendida-as implicações fuzzy intuicionistas intervalares, de acordo com VISINTIN et.al.(2011), e na geração das suas funções conjugadas.

2. MÉTODOLOGIA

Com a realização do levantamento bibliográfico que fundamentam a lógica fuzzy intervalar, a lógica fuzzy intuicionista e a lógica fuzzy intuicionista intervalar, visando os estudos aprofundados sobre as diversas extensões da LF, introduziu-se a definição de automorfismos intuicionistas intervalares. Com base neste resultado, a metodologia para continuidade do trabalho considera a análise do comportamento da ação dos automorfismos introduzidos no presente trabalho, sobre as implicações fuzzy intuicionistas intervalares já estudadas em VISINTIN et.al.(2011).

Uma **negação fuzzy** $N:U\rightarrow U$ verifica as propriedades:

N1: $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$; e

N2: Se $x \geq y$ então $N(x) \leq N(y)$, $\forall x, y \in U$.

Além disso, negações fuzzy, que satisfazem a propriedade involutiva, isto é,

N3: $N(N(x)) = x$, $\forall x \in U$.

são chamadas de negações fuzzy fortes (SFNs). A negação Zadeh, dada por $N_S(x) = 1 - x$ é uma negação fuzzy forte.

Definição 1 (NAVARRA, 1999) Um **automorfismo** $\varphi:U\rightarrow U$ é uma função bijetora e monotônica, isto é $x \leq_U y \Rightarrow \varphi(x) \leq_U \varphi(y)$.

Equivalentemente, em BUSTINCE et al. (2003) φ é um automorfismo em U se é contínua, estritamente crescente, $\varphi(0)=0$ e $\varphi(1)=1$. Observe que o inverso de um automorfismo é também um automorfismo e automorfismos são fechadas sob a composição, ou seja, se φ e φ' são automorfismos em U, $\varphi\circ\varphi'(x)$ também é um automorfismo em U.

A ação de um automorfismo $\varphi:U\rightarrow U$ em uma negação fuzzy $N:U\rightarrow U$ é uma negação fuzzy $N^{\varphi}:U\rightarrow U$ denominada conjugada de N definida por

$$N^{\varphi}(x) = \varphi^{-1}(N(\varphi(x))).$$

Definições, propriedades de negações intervalares são extensões das negações fuzzy no conjunto $\mathbf{U}=\{(x^1,x^2)\in U^2 | x^1+x^2=1\}$ de intervalos cujos extremos são complementares em U. Para demais conceitos relativos a automorfismos intuicionistas veja COSTA et.al (2011), e analogamente, para teorias relacionadas aos automorfismos intervalares veja BEDREGAL et.al (2006).

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Seja $\tilde{\mathbf{U}}=\{\tilde{X}=(X_1,X_2)\in \mathbf{U}^2 | X_1+X_2 \leq_U [1,1]\}$ o conjunto dos graus intervalares de pertinência e de não pertinência em $\mathbf{U}$. Para todo $\tilde{X}, \tilde{Y}\in\tilde{\mathbf{U}}$, seja a relação de ordem em $\tilde{\mathbf{U}}$ definida por $\tilde{X}\leq_{\tilde{\mathbf{U}}}\tilde{Y}$ implicando $X_1\leq_{\mathbf{U}}Y_2$ e $X_2\geq_{\mathbf{U}}Y_2$. Assim, tem-se que $\tilde{\mathbf{0}} = ([\mathbf{0,0}],[\mathbf{1,1}]) \leq_{\tilde{\mathbf{U}}} \tilde{X}$ e $\tilde{X}\leq_{\tilde{\mathbf{U}}} \tilde{\mathbf{1}}=([\mathbf{1,1}], [\mathbf{0,0}])$, para todo $\tilde{X}\in\tilde{\mathbf{U}}$. Consideram-se as projeções: $l,r:\tilde{\mathbf{U}}\rightarrow\mathbf{U}$, dadas por;

$$l_{\tilde{\mathbf{U}}}(\tilde{X})=l_{\tilde{\mathbf{U}}}(X_1,X_2)=X_1\,; \qquad r_{\tilde{\mathbf{U}}}(\tilde{X})=r_{\tilde{\mathbf{U}}}(X_1,X_2)=X_2\,.$$

3.1. AUTOMORFISMOS INTUICIONISTAS INTERVALARES

Definição 2 Um automorfismo $\Phi:\tilde{\mathbf{U}}\rightarrow\tilde{\mathbf{U}}$ é uma função intuicionista intervalar bijetiva e monotônica, considerando a relação de ordem em $\tilde{\mathbf{U}}$.

A seguir, pela representabilidade de automorfismos intervalares a partir de composições entre automorfismos intuicionistas intervalares e suas projeções é possível recuperar automorfismos intervalares:

Proposição 1 Sejam $\Phi:\mathbf{U}\rightarrow\mathbf{U}$ um automorfismo intervalar em $\mathbf{U}$, e $\Phi:\tilde{\mathbf{U}}\rightarrow\tilde{\mathbf{U}}$ automorfismo Φ-representável dados por $\Phi(\tilde{X}) = (\Phi(X_1), \mathbf{1} - \Phi(\mathbf{1} - X_2))$.

Proposição 2 Sejam $\Phi:\mathbf{U}\rightarrow\mathbf{U}$ e $\Phi:\tilde{\mathbf{U}}\rightarrow\tilde{\mathbf{U}}$ automorfismos em $\mathbf{U}$ e $\tilde{\mathbf{U}}$, respectivamente. Então as funções $\Phi_l, \Phi_r:\mathbf{U}\rightarrow\mathbf{U}$ são automorfismos em $\mathbf{U}$ definidos por:

$$\Phi l_{\tilde{\mathrm{U}}}(X) = l_{\tilde{\mathrm{U}}}(\Phi(X, \mathbf{1}-X));$$
$$\Phi r_{\tilde{\mathrm{U}}}(X) = \mathbf{1} - r_{\tilde{\mathrm{U}}}(\Phi(X, \mathbf{1}-X)).$$

Proposição 3 Quando $\Phi : \tilde{\mathbf{U}} \rightarrow \tilde{\mathbf{U}}$ é um automorfismo intuicionista intervalar, segue que $\Phi l_{\tilde{\mathrm{U}}} = \Phi r_{\tilde{\mathrm{U}}}$.

Proposição 4 Seja $\Phi : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$ um automorfismo intervalar e $\Phi : \tilde{\mathbf{U}} \rightarrow \tilde{\mathbf{U}}$ um automorfismo Φ - representável. Então segue que $\Phi l_{\tilde{\mathrm{U}}} = \Phi = \Phi r_{\tilde{\mathrm{U}}}$

Proposição 5 Seja Φ um automorfismo em $\tilde{\mathbf{U}}$ e $\Phi_{l_{\tilde{\mathrm{U}}}}$ e $\Phi_{r_{\tilde{\mathrm{U}}}}$ automorfismos em $\mathbf{U}$. Então $\varphi_{l_{\mathrm{U}}}, \varphi_{r_{\mathrm{U}}}:\mathrm{U} \rightarrow \mathrm{U}$ são respectivamente dados por:

$$\varphi_{l_{\mathrm{U}}}(x) = l_{\mathrm{U}}(\Phi l_{\tilde{\mathrm{U}}}([x,x],[1-x,1-x]));$$
$$\varphi_{r_{\mathrm{U}}}(x) = r_{\mathrm{U}}(\Phi r_{\tilde{\mathrm{U}}}([x,x],[1-x,1-x])).$$

Proposição 6 Seja Φ um automorfismo em $\tilde{\mathbf{U}}$. A conjugada de N_I, indicada por $N_I^{\Phi}: \tilde{\mathrm{U}}\rightarrow\tilde{\mathrm{U}}$ é também uma negação intuicionista intervalar definida por:

$$N_I^{\Phi}(\tilde{X}) = \Phi^{-1}(N_I(\Phi(\tilde{X})).$$

Pela Prop. 6, a expressão da extensão em $\tilde{\mathbf{U}}$ da negação de Zadeh é dada por:

$$N_{I_S}(\tilde{X}) = N_{I_S}(X_1, X_2) = (N_S(N_S(X_2)), N_S(N_S(X_1))) = (X_2, X_1).$$

E sua conjugada, a partir de um automorfismo Φ em $\tilde{\mathbf{U}}$, é a negação dada por:

$$N_I^{\Phi}(\tilde{X}) = \Phi^{-1}(N_I(\Phi(X1), \Phi(X2)))$$

4. CONCLUSÕES

Com os estudos realizados foi obtida definição de automorfismos intuicionistas intervalares, ampliando os estudos já apresentados em VISINTIN et.al.(2011) e VISINTIN et.al.(2012). As principais proposições mostram que a ação de automorfismos preserva as propriedades das negações intuicionistas intervalares. Os resultados viabilizaram a comutatividade entre as seguintes classes de funções: (i) Aut(**U**) e Aut($\tilde{\mathbf{U}}$), indicando as classes de automorfismos intervalares e intuicionistas intervalares, respectivamente; e (ii) as classes C(**N**) e C($\mathbf{N}_I$) correspondendo às classes de negações intervalares e intuicionistas intervalares. Esta comutatividade esta representada no diagrama a seguir.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}(\tilde{\mathbf{U}}) \times C(\mathbf{N}_I) \arrow[r] \arrow[d] & C(\mathbf{N}_I) \arrow[d] \\
{} & {}
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{U}) \times C(\mathbf{N})) \longrightarrow C(\mathbf{N})$$

Na continuidade do trabalho, estão sendo propostas investigações sobre as conjugadas de implicações fuzzy intuicionistas intervalares VISINTIN et.al.(2011) com especial interesse nas S-implicações intuicionistas intervalares.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATANASSOV, K. T. Intuitionistic Fuzzy Sets. **Fuzzy Sets and Systems**, v.20, p.87–96, 1986.

ATANASSOV,K, ; GARGOV,G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 31, n. 3, p. 343–349, 1989.

ATANASSOV,K.; GARGOV,G. Elements of intuitionistic fuzzy logic. **Fuzzy Sets and Systems**., v. 95 n. 1, p. 39–52, 1998.

BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. Tópicos de Lógica Fuzzy com Aplicações em Biomatemática. Campinas, SP: UNICAMP/IMECC, 2006.

BEDREGAL, B. C.; TAKAHASHI, A. Interval Valued Versions of T-Conorms, Fuzzy Negations and Fuzzy Implications. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, VANCOUVER, 2006, 2006, Los Alamitos. **Proceedings.** IEEE, 2006. p.1981–1987

BUSTINCE, H.; BURILLO, P.; SORIA, F. Automorphism, Negations and Implication Operators. **Fuzzy Sets and Systems**, v.134, n.2, p.209–229, 2003.

CARLSSON, C.; FULLER, R. **Fuzzy Reasoning in Decision Making and Optimization**. Heidelberg: Physiva-Verlag Springer, 2002.

COSTA, C. G.; BEDREGAL, B. C.; NETO A. D. D. Re- lating De Morgan triples with Atanassov's intuitionistic De Morgan triples via automorphisms. **International Journal of Approximate Reasoning**, 52:473–487, 2011.

DUBOIS, D.; PRADE, H. **Fundamentals of Fuzzy Sets**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000.

NAVARA, M. Characterization of measures based on strict triangular norms. **Mathematical Analysis and Applications**, v.236, n.2, p.370–383, 1999.

VISINTIN,L.; REISER,R.; BEDREGAL, B. C. Implicações Fuzzy Intuicionistas Valoradas Intervalarmente, Anais: Workshop Escola de Informática Teórica, **WEIT2011**, 1-13(2011).

VISINTIN,L.; REISER,R.; BEDREGAL, B. C. Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Coimplications, Anais: Conferência Latino Americana em Informática, **CLEI 2012**, 1-10(2012) (a ser publicado).

ZADEH, L. A. . Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.

ZADEH, L. A. Fuzzy logics and approximate reasoning. **Synthese**, v.30, p.407– 428, 1975.