EQUAÇÕES DE LORENZ E ASSIMILAÇÃO DE DADOS SINTÉTICOS ATRAVÉS DO FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO

BECK, Vinicius Carvalho[1]; **HÄRTER, Fabrício Pereira**[2]; **YAMASAKI, Yoshihiro**[3]

[1]*UFPEL* - vonoco@gmail.com
[2]*UFPEL* - fabricio.harter@ufpel.edu.br
[3]*UFPEL* - yamasaki@fis.ua.pt

1. INTRODUÇÃO

Lorenz (1963), com o objetivo de explorar as soluções caóticas do modelo de Saltzman (1962), expandiu as variáveis de estado deste modelo em série de Fourier, retendo termos de baixa ordem. Deste modo, o autor obteve o seguinte sistema acoplado não-linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma(x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = Rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

onde x está associado com a intensidade do movimento convectivo, y com a diferença de temperatura entre as correntes ascendente e subsidente e z com a perturbação do perfil de temperatura vertical. Os coeficientes, no caso do sistema terra-atmosfera, são $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e $R = 28$.

A filtragem de Kalman é uma ferramenta de filtragem de erros aplicada, a princípio, a modelos lineares (KALNAY, 2003). O Filtro de Kalman Estendido (FKEst) é uma adaptação do Filtro de Kalman original (FK) para problemas não lineares. O FKEst segue os mesmos passos do FK, mas calcula a covariância dos erros de estimativa linearizando as trajetórias não-lineares da dinâmica do sistema. Na prática, substitui-se a matriz de dinâmica do sistema por um modelo L_i, chamado de modelo tangente linear (MTL).

O MTL é um operador que transforma uma perturbação final do tempo t_i, em uma perturbação inicial do tempo t_{i+1}. Assim, os passos para implementação do FKEst são os seguintes:

1) Previsão a partir do modelo:

$$w_{i+1}^{f} = L_i w_i^{a}$$
$$P_{i+1}^{f} = L_i P_i^{a} L_i^{T} + Q_i$$

onde w_{i+1}^{f} é a previsão, L_i é a matriz tangente linear, w_i^{a} é a análise, P^f é a matriz de covariância dos erros de estimativa, P^a é a matriz de covariância dos erros de estimativa obtida pela análise e Q_i é a matriz de covariância do ruído de observação.

2) Cálculo da Matriz Ganho de Kalman:

$$G_{i+1} = P_{i+1}^{f} H_{i+1}^{T} [R_{i+1} + H_{i+1} P_{i+1}^{f} H_{i+1}^{T}]^{-1}$$

onde G_{i+1} é a Matriz Ganho de Kalman, H_{i+1} é um operador que transforma as grandezas medidas pelos instrumentos meteorológicos nas grandezas utilizadas pelo modelo e R é a matriz de covariância dos erros de observação.

3) Cálculo da estimativa:

$$w_{i+1}^{est} = H_{i+1} w_{i+1}^{f}$$

onde w_{i+1}^{est} é uma estimativa para o vetor w_{i+1} real (sempre desconhecido).

4) Análise:

$$w_{i+1}^{a} = w_{i+1}^{f} + G_{i+1}(w_{i+1}^{obs} - w_{i+1}^{est})$$

onde w_{i+1}^{obs} é o vetor w_{i+1} medido (com erro de medição).

$$P_{i+1}^{a} = [I - G_{i+1} H_{i+1}] P_{i+1}^{f}$$

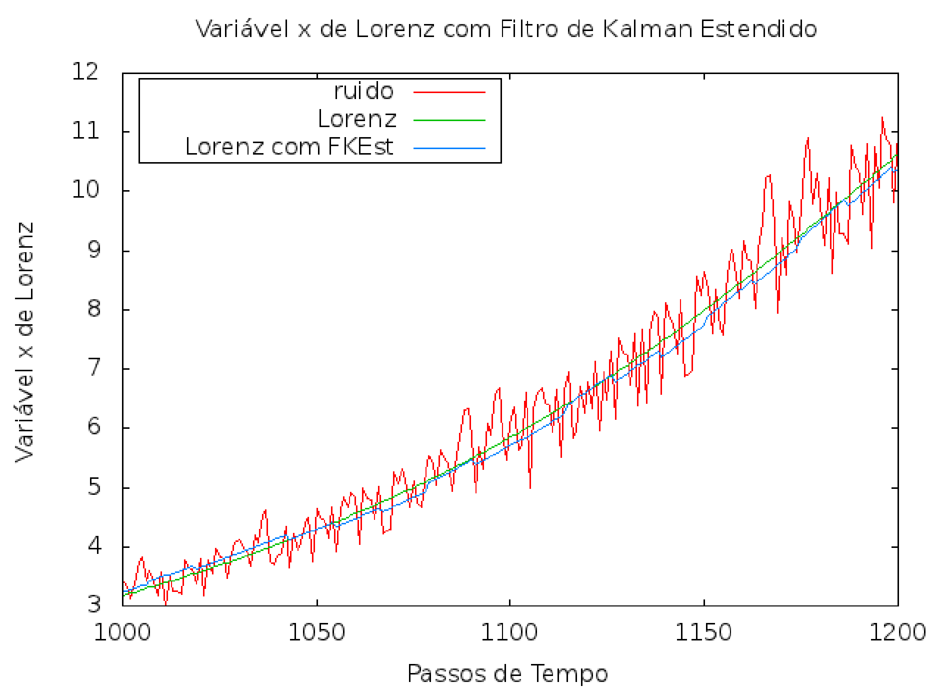
onde I é a matriz identidade.

2. MATERIAL E MÉTODOS

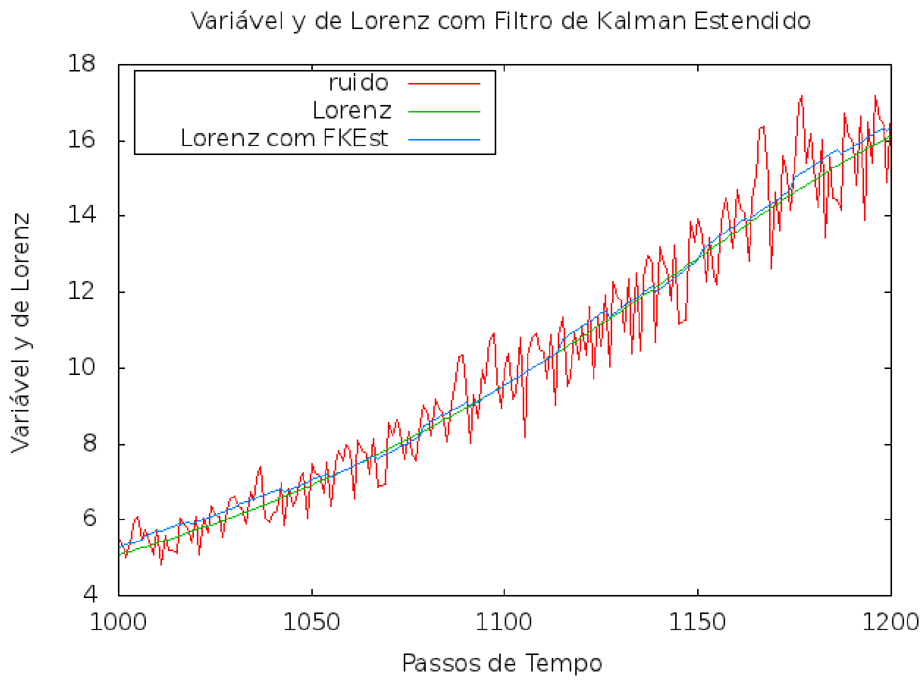
Utilizando passo de tempo de 10^{-3} segundos, integrou-se o modelo de Lorenz por 24000 passos de tempo, com assimilação feita a cada 12 passos. Foram assimilados dados sintéticos, gerados somando-se um ruído aleatório com distribuição gaussiana de variância 2 aos valores da saída do modelo de Lorenz,seguindo a mesma metodologia de Härter (2007). As implementações numéricas das equações descritas acima foram realizadas utilizando-se linguagem de programação FORTRAN e compilador gfortran. A discretização temporal foi realizada através do Método Preditor-Corretor (HOFFMAN, 1992).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

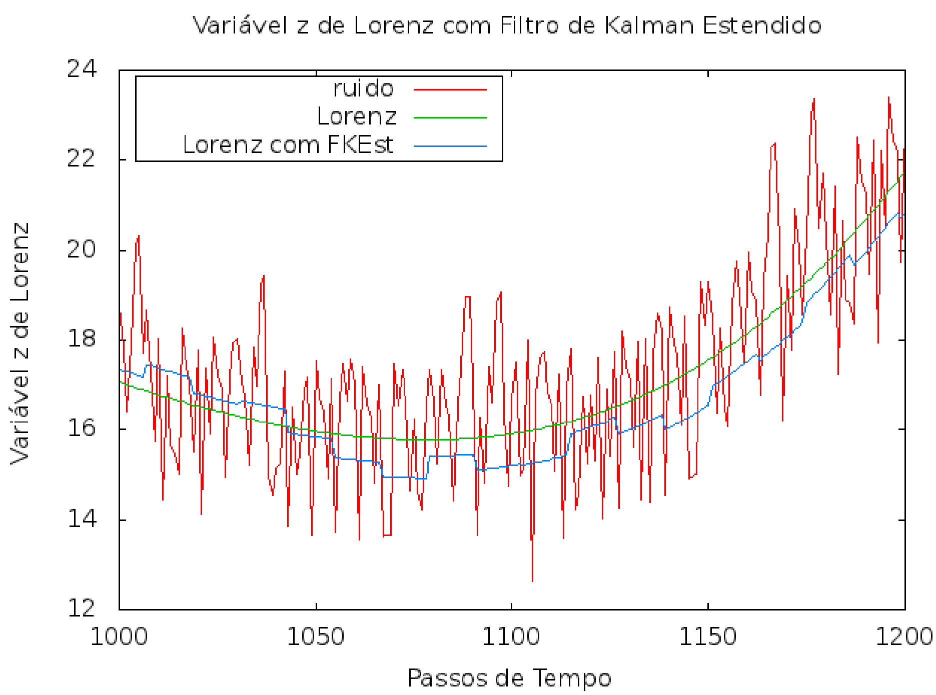
Nas figuras a seguir, pode-se visualizar a implementação para valores entre 1000 e 1200 passos de tempo. A curva de cor verde representa o modelo de Lorenz, a curva de cor vermelha representa os ruídos gerados artificialmente e a curva de cor azul representa o modelo de Lorenz integrado com assimilação de dados pelo FKEst. Em cada figura, os gráficos se referem às variáveis x, y e z de Lorenz, respectivamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 1: (a), (b) e (c) Implementação do FKEst no modelo de Lorenz.

Também foi calculado, para cada iteração, o Erro Médio Quadrático (EMQ), comparando-se a saída do modelo de Lorenz com assimilação de dados por FKEst e a saída do mesmo modelo sem assimilação de dados, o qual pode ser analisado no gráfico abaixo:

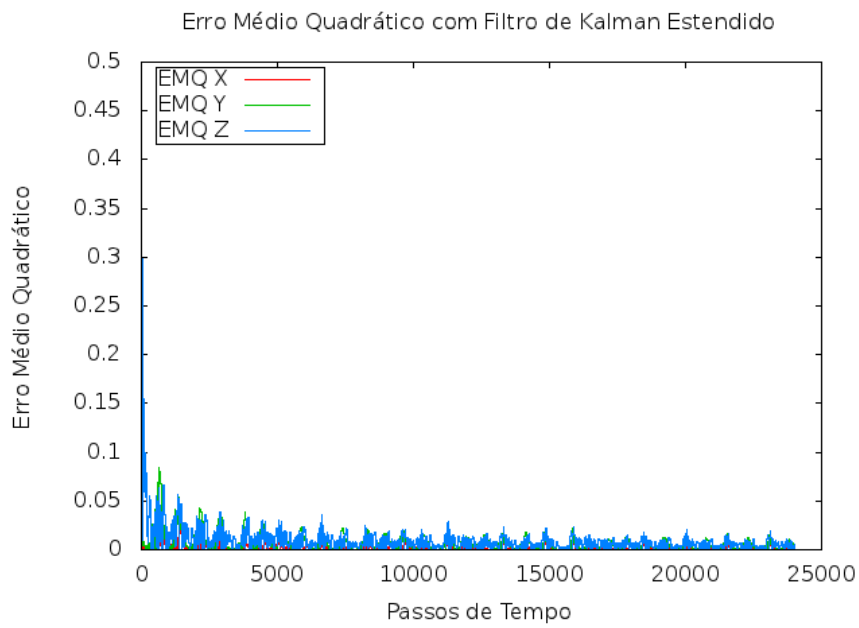


Figura 2: EMQ do FKEst aplicado ao modelo de Lorenz.

4. CONCLUSÃO

Observou-se um EMQ bastante pequeno, o que indica que o FKEst se mostrou bastante eficaz para minimização do erro de previsão das variáveis do modelo de Lorenz.

REFERÊNCIAS

HÄRTER, Fabrício Pereira. **Redes Neurais Recorrentes Aplicadas à Assimilação de Dados em Dinâmica Não-linear.** 2007. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 138p.

HOFFMAN, Joe D. **Numerical Methods for Engineers and Scientists**. McGraw-Hill Book, 1992. 825p.

KALNAY, Eugenia. **Atmospheric modeling, data assimilation and predictability**. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. 341p.

LORENZ, E. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.

SALTZMAN, Barry. Finite amplitude free convection as an initial value problem. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 19, p. 329-341, 1962.