EXTENDENDO A ANÁLISE DE PROPRIEDADES DE IMPLICAÇÕES FUZZY PARA IMPLICAÇÕES FUZZY INTUICIONISTAS INTERVALARES

<u>VISINTIN, Lidiane</u>; REISER, Renata

PPGC, CDTec/UFPel – {lvisintin,reiser}@inf.ufpel.edu.br

1. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy introduzida em ZADEH(1965); SAMBUC(1975) generaliza a Teoria dos Conjuntos Clássica, estendendo a relação dicotômica da relação de pertinência de um elemento a um dado conjunto. Ou seja, um subconjunto fuzzy A num conjunto universo X é definido em termos da função de pertinência μ:X› [0,1], associando a cada x ϵ X um número $\mu_A(x)$ denominado grau de pertinência de x em A, e tal que $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$. Esta construção se estende às proposições na Lógica Fuzzy (LF), que além de poder avaliar como completamente verdadeira ($\mu_A(x)=1$) ou completamente falsa ($\mu_A(x)=0$) uma proposição, também considera a noção de parcialmente verdadeira ou parcialmente falsa. Neste contexto, tem-se na construção dual, a função de não-pertinência $\upsilon_A(x)$:X› [0,1] associada a conjuntos fuzzy, mas que ainda preserva o princípio do meio excluído, ou seja, $\mu_A(x)+\upsilon_A(x)=1$.

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy Intuicionistas consiste numa generalização da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, introduzida em ATANASSOV; GARGOV (1998) e considerando que ambos, o grau de pertinência e de não-pertinência estão relacionados por uma inequação, ou ainda, a soma destes é sempre menor, e no máximo igual a um. No caso da igualdade, tem-se a caracterização dos conjuntos fuzzy. A definição de intuicionista se reporta à Lógica Intuicionista, onde o princípio do meio excluído nem sempre é satisfeito. Assim, a diferença entre os graus de pertinência e de não-pertinência ($\pi=1-\mu_A-\upsilon_A$) é considerada como a medida de indeterminação, ou ainda, de indecibilidade.

Muitas novas abordagens lógicas para modelagem e tratamento de incertezas e imprecisão em sistemas especialistas têm sido propostas, dentre estas, a Lógica Fuzzy Intervalar LI;ZADEH (1965), considerando os conjuntos fuzzy intervalares. E, outra relevante generalização também introduzida por Atanassov ATANASSOV;GARGOV (1989), a Lógica Fuzzy Intuicionista Intervalar (LFI), integrando os conceitos de conjuntos fuzzy intuicionistas e conjuntos fuzzy intervalares. Recentemente, outros autores visam esta integração CHEN (2007); BUSTINCE et al. (2008); LI (2011), modelando a imprecisão além da incerteza.

Na LFI, tem-se uma interpretação para a medida de indecibilidade agregada à medida de imprecisão, dado pelo intervalo resultante da diferença entre o intervalo degenerado **1**=[1,1] e a soma dos graus de pertinência e de não-pertinência intervalar de um elemento a um conjunto fuzzy intuicionista intervalar.

Nos sistemas especialistas e na teoria de controles muito do conhecimento de um especialista ou dos operadores de controle são estabelecidos pelas as regras condicionais e frequentemente, estas são interpretadas funções de implicação nos sistemas de inferência. Esta modelagem tem aplicação em várias situações, por exemplo, ao operar uma máquina, ao resolver problemas matemáticos, programar um computador, ou até mesmo ao tomar uma decisão de qual produto comprar. Os operadores fuzzy de implicação e coimplicação são essenciais para os métodos dedutivos que usam o raciocínio aproximativo, interpretando as condicionais fuzzy em sistemas de dedução baseados em LF.

Em VISINTIN et.al.(2011), introduz-se a definição de implicações intuicionistas intervalares e, portanto, as proposições *p* e *q* de uma condicional "se *p* então *q*" são conjuntos fuzzy dependem de dois parâmetros, o grau intervalar de pertinência e o de não pertinência foram considerados, mostrando que estas implicações são operadores na LF e generalizam os correspondentes operadores clássicos. O principal objetivo da etapa atual da pesquisa é estender o estudo de propriedades satisfeitas por conetivos (implicações) na LF para a LFI.

2. METODOLOGIA

Com a realização do levantamento bibliográfico que fundamentam a lógica fuzzy intervalar, a lógica fuzzy intuicionista e a lógica fuzzy intuicionista intervalar, visando o estudos aprofundados sobre as diversas extensões da LF, introduziu-se a definição de implicações fuzzy intuicionistas intervalares gerada por funções de agregação intervalares que atuam sobre um par de funções duais, denominadas implicações e coimplicações intervalares. Com base neste resultado, a metodologia para continuidade do trabalho considera a estender a análise das principais propriedades da LF para as implicações fuzzy intuicionistas intervalares que satisfazem a definição estabelecida, ampliando os estudos apresentados na literatura em BUSTINCE et al.(2004); BUSTINCE et al. (2007); BUSTINCE et al.(2008b); BUSTINCE et al.(2010); JURIO et al.(2011).

2.1 Implicações e Coimplicações Intervalares

Seja $U=\{[a_1,a_2] \mid 0\leq a_1,a_2\leq 1 \text{ e } a_1,a_2 \in R\}$ o conjunto de todos os subintervalos de números reais em [0,1], tais que $\mathbf{0}=[0,0]\leq[a_1,a_2]\leq[1,1]=\mathbf{1}$, e as projeções l,r: U› U, dadas por: $l([a_1,a_2])=a_1=inf(A)=\underline{A}$ e $l([a_1,a_2])=a_2=sup(A)=\bar{A}$ onde $A=[a_1,a_2]\in U$.

Definição 2.1 Uma agregação intervalar $M:U^2$› U é uma função comutativa, isotônica em ambos os argumentos e satisfazendo as seguintes condições de contorno: $M(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbf{0}$ e $M(\mathbf{1},\mathbf{1})=\mathbf{1}$. M é idempotente sempre que $M(A,A)=A$, se $A\in U$.

As funções definidas pelas expressões $\cap(A,B)=[\min\{a_1,b_1\}, \min\{a_2,b_2\}]$ e $\mathbf{U}(A,B)=[\max\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\}]$ são exemplos de funções de agregação.

Definição 2.2 Uma negação fuzzy **N:**U› U é uma função decrescente satisfazendo as condições $N(\mathbf{0})=\mathbf{1}$ e $N(\mathbf{1})=\mathbf{0}$. Se, além disso, é involutiva, $N(N(A))=A$ onde $A\in U$, então **N** é uma negação fuzzy forte.

Neste trabalho, considera-se a negação de Zadeh, $N_S(A)=\mathbf{1}-A=[1-a_2,1-a_1]$.

Definição 2.3 Uma (co)implicação intervalar (**J**)**I**:U^2› U é uma função binária que satisfaz as condições (J1)I1:

I1. $I(\mathbf{0},\mathbf{0})= I(\mathbf{0},\mathbf{1})=I(\mathbf{1},\mathbf{1})=\mathbf{1}$ **e** $I(\mathbf{1},\mathbf{0})=\mathbf{0}$; J1. $J(\mathbf{0},\mathbf{0})=J(\mathbf{1},\mathbf{0})=J(\mathbf{1},\mathbf{1})=\mathbf{0}$ **e** $J(\mathbf{0},\mathbf{1})=\mathbf{1}$.

Definição 2.4 Seja N uma negação forte em U, uma coimplicação $\mathbf{I_N}$:U^2› U é uma função **N**–dual da implicação **I**:U^2› U se, e somente se, $\mathbf{I_N}(X,Y)=\mathbf{N}(\mathbf{I}(\mathbf{N}(X), \mathbf{N}(Y)))$.

2.2 Implicações e Coimplicações Fuzzy Intuicionistas Intervalares

Seja $U=\{(X_1,X_2)\in U^2 \; X_1+X_2\leq \mathbf{1}\}$ sendo $(0,1)\leq(X_1,X_2)\leq(1,0)$ sempre que $(X_1,X_2)\in U^2$.

Definição 2.5 Uma implicação em LFI denotada por $\mathbf{I_I}$:U^2› U satisfaz a Prop. I_I1:

I1. $I_I((0,1),(0,1))=I_I((0,1),(1,0))=I_I((1,0),(1,0))=(1,0)$ e $I_I((1,0),(0,1))=(0,1)$;

Teorema 2.1. Sejam I uma implicação intervalar e I_N a coimplicação intervalar associada a I pela negação forte N. Considere $M_I=\{M_i\}_{i\in\{1,2,3,4\}}$ como um conjunto de funções de agregação intervalares idempotentes, tais que se $X,Y\in U$, tem-se:

$M_1(X,Y) + M_3(N(X),N(Y)) \geq [1,1]$ e $M_2(X,Y) + M_4(N(X),N(Y)) \leq [1,1]$.

Então, para todo $(X_1,X_2),(Y_1,Y_2) \in U$ a função binária $\mathbf{I_I}$**:**$U^2 \rightarrow U$ é uma implicação fuzzy intuicionista intervalar definida por:

$$I_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) = I(M_1(X_1, N(X_2)), M_2(Y_1, N(Y_2))), I_N(M_3(N(X_1),X_2), M_4(N(Y_1),Y_2)).$$

Sejam as funções de agregação em definidas por: $M_1 = M_3 = \mathbf{U}$ e $M_2 = M_4 = \mathbf{\cap}$. Considere também a versão intervalar para a implicação de Kleene-Dienes e sua correspondente coimplicação Bustince et al.(2004), obtida a partir da negação forte N_S , e expressas por: $I(X_1, X_2) = \mathbf{U}(N_S(X_1), X_2)$ e $I_N(X_1, X_2) = \cap(N_S(X_1), X_2)$. A versão intervalar para a implicação fuzzy intuicionista introduzida em ATANASSOV; GARGOV (1998) pode ser gerada aplicando o Teorema 2.1:

$$I_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) = [\mathbf{U}(X_2,Y_1), \cap(X_1,Y_2)].$$

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seguir, apresentam-se as propriedades das implicações na LF, as quais foram analisadas no trabalho de BUSTINCE et al.(2004) considerando a Lógica Fuzzy Intuicionistas. O principal resultados deste trabalho, resumido no próximo teorema, mostra que a extensão da definição de implicações na Lógica Fuzzy Intuicionista Intervalar preserva estas propriedades.

Seja uma Implicação $\mathbf{I_I}$:$U^2 \rightarrow U$ e uma negação forte N_S:$U^2 \rightarrow U$ em LFI e sejam (X_1,X_2), (Y_1,Y_2) e $(Z_1,Z_2) \in U^2$. Consideram-se as seguintes propriedades:

I2. $(X_1,X_2) \leq (Z_1,Z_2) \Rightarrow I_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) \geq I_I((Z_1,Z_2), (Y_1,Y_2))$

I3. $(X_1,X_2) \leq (Z_1,Z_2) \Rightarrow I_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) \leq I_I((X_1,X_2), (Z_1,Z_2))$

I4. $I_I((\mathbf{0},\mathbf{1}),(Y_1,Y_2)) = (\mathbf{1},\mathbf{0})$, dominância da falsidade no antecedente

I5. $I_I((X_1,X_2),(\mathbf{1},\mathbf{0})) = (\mathbf{1},\mathbf{0})$, dominância da verdade no consequente

I6. $I_I((\mathbf{1},\mathbf{0}),(Y_1,Y_2)) = (Y_1,Y_2)$, princípio da neutralidade à esquerda

I7. $I_I((X_1,X_2), I_I((Y_1,Y_2),(Z_1,Z_2))) = I_I((Y_1,Y_2), I_I((X_1,X_2),(Z_1,Z_2)))$, princípio da troca

I8. $(X_1,X_2) \leq (Y_1,Y_2) \Leftrightarrow I_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) = (\mathbf{1},\mathbf{0})$

I9. $I_I((X_1,X_2),(\mathbf{0},\mathbf{1})) = N_S((X_1,X_2))$é uma negação fuzzy intuicionista intervalar forte

I10. $I_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) \geq (Y_1,Y_2)$

I11. $I_I((X_1,X_2),(X_1,X_2)) = (\mathbf{1},\mathbf{0})$ princípio da identidade

I12. $I_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2)) = I_I(N_S((Y_1,Y_2)),N_S((X_1,X_2))$, princípio da contraposição

Teorema 3.1. Sejam I uma implicação intervalar e I_N a coimplicação intervalar associada a I pela negação forte N. Considere $M_I=\{M_i\}_{i \in \{1,2,3,4\}}$ como um conjunto de funções de agregação intervalares idempotentes,e seja $\mathbf{I_I}$**:**$U^2 \rightarrow U$ é uma implicação fuzzy intuicionista intervalar definida de acordo com as condições estabelecidas pelo Teorema 2.1. Uma implicação fuzzy intuicionista intervalar $\mathbf{I_I}$**:**$U^2 \rightarrow U$ verificam as propriedades IK ($K \in \aleph$, $1 \leq k \leq 12$) sempre que as correspondentes implicações fuzzy intuicionistas, definidas em acordância com Proposição3 em BUSTINCE et al.(2004), satisfazem as propriedades análogas IK.

4. CONCLUSÕES

Os resultados obtidos com o uso de agregadores e pares de funções duais para definição de implicações fuzzy intuicionistas intervalares estendem o trabalho introduzido por BUSTINCE et al. (2004). A aplicação da expressão genérica introduzida no Teorema 2.1 para análise das principais propriedades das implicações fuzzy, é de grande importância, pois esse estudo auxilia no desenvolvimento de sistemas especialistas. A continuidade do trabalho busca a análise de propriedades intrincas à LI. Este trabalho está inserido em um projeto que visa o estudo estrito da LFI considerando dois importantes tópicos: (i) a aplicação de K-operators sobre (co)implicações para construção de implicações fuzzy intuicionistas intervalares estendendo o trabalho desenvolvidos em REISER; BEDREGAL (2011a); (ii) a obtenção da representação canônica de implicações fuzzy intuicionistas intervalares, considerando os resultados preliminares em REISER; BEDREGAL (2011b) .

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ATANASSOV,K, ; GARGOV,G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 31, n. 3, p. 343–349, 1989..

ATANASSOV,K.; GARGOV,G. Elements of intuitionistic fuzzy logic. **Fuzzy Sets and Systems**., v. 95 n. 1, p. 39–52, 1998.

BUSTINCE,H.; BARRENECHEA,E.; MOHEDANO,V. Intuicionistic fuzzy implication operators – an expression and main properties. **Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, v. 12, n. 3, p. 387–406, 2004.

BUSTINCE,H.; BARRENECHEA,E.; PAGOLA,M. Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal functions: Image thresholding invariant. **Pattern Recognition Letters**, 29:525–536, 2008b.

BUSTINCE,H., PAGOLA,M.; BARRENECHEA,E. Construction of fuzzy indices from fuzzy disubsethood measures. Application to the global comparison of images. **Information Sciences,** 177(3):906–929, 2007.

BUSTINCE,H.; BARRENECHEA,E; FERNANDEZ,J.; PAGOLA,M.; MONTERO,J.; GUERRA,C. Contrast of a fuzzy relation. **Information Sciences,**180(8):1326–1344, 2010.

BUSTINCE, H., BARRENECHEA, E., and PAGOLA, M. Generation of interval-valued fuzzy and atanassov's intuitionistic fuzzy connectives from fuzzy connectives and from K_ operators: Laws for conjunctions and disjunctions, amplitude. **Intl. Journal of Intelligent Systems**, v.23, n.6, p. 680–714, 2008.

CHEN, T.-Y. . A note on distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the hausdorff metric. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 158, n. 22, p. 2523–2525, 2007.

JIANG, Y. Corrigendum to "interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties" [comput. math. appl. 60 (2010) 906-918]. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 61, n. 10, p. 3179, 2011.

LI, D.-F. . Extension principles for interval-valued intuitionistic fuzzy sets and algebraic operations. **FO & DM**, v. 10, n. 1, 2011.

REISER,R.; BEDREGAL,B. Generation of interval-valued fuzzy implications from k-operators. **In WILF 2011**. Springer Series - Lecture Notes in Computer Science, 2011.

VISINTIN,L.; REISER,R. Implicações Fuzzy Intuicionistas Valoradas Intervalarmente, Anais: Workshop Escola de Informática Teórica, **WEIT2011**, 1-13(2011) (a ser publicado).

REISER, R.; BEDREGAL,B. Representable coimplications from aggregation operators and duality principle. **In Proc. of 7th EUSFLAT**,Aix-les-Bains,p.1–8,Atlantis Press (2011).

SAMBUC, R. **Fonctions Φ-floues. Application l'aide au diagnostic en pathologie thyroidienne**. PhD thesis, Univ. Marseille, Marseille, 1975.

ZADEH, L. A. . Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.

ZADEH, L. A.The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I. **Information Sciences**, v. 8, n. 3, p. 199–249, 1975.