# APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO CÁLCULO DO DECAIMENTO RADIOATIVO

**GARCIA, Kathlleen Borges[1]; GONÇALVES, Victoria de Moraes; BUSKE, Daniela[2]**

[1]UFPel, Centro de Ciências Químicas, Farmacêuticas e de Alimentos, Graduação em Química Bacharelado; kathlleen.garcia@gmail.com , victoriahgoncalves@hotmail.com
[2]UFPel, Departamento de Matemática e Estatística. Orientador. daniela.buske@ufpel.edu.br

## 1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais ordinárias (EDO's) são equações que contém derivadas de uma variável dependente em relação a uma variável independente e são classificadas pela ordem de acordo com a derivada de maior ordem presente na equação. Muitas das aplicações de EDO's são de primeira e de segunda ordem. Estas equações modelam fenômenos que ocorrem em diversas áreas como Física, Biologia, Matemática, além da Química (BRONSON & COSTA, 2008).

Uma aplicação importante das EDO's trata do decaimento radioativo. Cada elemento radioativo se desintegra a uma taxa temporal que lhe é característica, na qual o tempo que este elemento leva para sua atividade ser reduzida à metade é chamado de meia vida. Na natureza existem elementos radioativos que realizam decaimentos sucessivos, até que o núcleo atinja uma configuração energicamente estável. Se após um decaimento radioativo, o núcleo não possuir, ainda, uma organização interna estável e ele executa outra transmutação para estabilizá-la e, ainda não conseguindo, prossegue, até atingir a configuração de equilíbrio.

Em cada decaimento, os núcleos emitem radiações dos tipos alfa, beta e/ou gama e cada um deles é mais "organizado" que o núcleo anterior. Essas sequências de núcleos são denominadas séries radioativas. Assim, neste trabalho, exploraremos a aplicação de EDO's para o estudo do decaimento radioativo da série do Urânio-235, o qual era o combustível utilizado nos reatores das usinas de Chernobyl, quando em abril de 1986 ocorreu o maior acidente nuclear da historia.

## 2 O MODELO MATEMÁTICO

A taxa na qual ocorre um processo de decaimento em um material radioativo é proporcional ao número de núcleos radioativos presentes na amostra, isto é, proporcional aqueles núcleos que ainda não decaíram. Se Q é a quantidade de matéria radioativa presente em algum instante, a taxa de variação de Q é dada por

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q$$

onde $\lambda$ é chamada de constante de decaimento. O sinal negativo indica que a quantidade do material radioativo Q é decrescente com a passagem do tempo.

Podemos resolver a equação acima pelo método do fator integrante e integrar de um instante inicial t=0 até um instante t, obtendo

$$Q = Q_0 e^{-\lambda t}$$

onde $Q_0$ representa a quantidade de material radioativo que ainda não decaiu em t=0. O tempo necessário para que metade de um dado número de núcleos radioativos se desintegre é chamado de meia-vida ($T_{1/2}$). Assim, substituindo $Q = \frac{Q_0}{2}$ e $t = T_{1/2}$ na equação inicial, obtemos $\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$, ou seja, $T_{1/2} = \frac{ln2}{\lambda}$. A expressão obtida relaciona o tempo de meia-vida com a constante de decaimento (Figura 1).

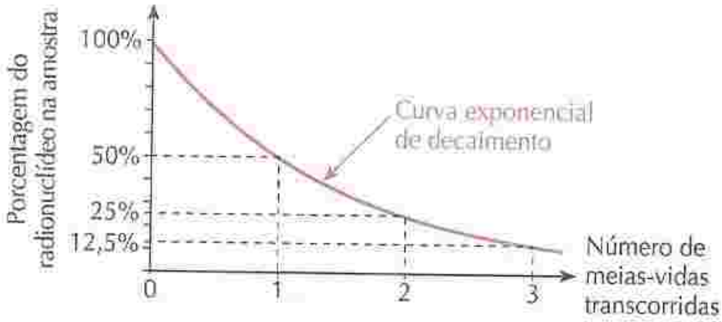


**Figura 1:** Curva exponencial de decaimento.

Quando um núcleo se transforma em outro núcleo sem influência externa, o processo é chamado de decaimento espontâneo e ocorre pela emissão de partículas alfa, beta ou gama. O decaimento pode ocorrer sucessivamente, causando uma cadeia ou uma série de desintegração, até que resulte em um elemento estável, como mostra a Figura 2, a série do Actínio que, na realidade, inicia-se com o $U^{235}$ até alcançar a estabilidade com o $Pb^{207}$.

A partir da meia-vida podemos calcular a constante de decaimento característica de cada elemento da cadeia de decaimento. Na Tabela 1 temos a meia-vida e as constantes de desintegração para os 3 primeiros elementos da cadeia do actínio.

**Tabela 1:** Meia-vida e constante de desintegração para os 3 primeiros elementos da cadeia do actínio.

| **Elemento** | **Tempo de meia-vida $T_{1/2}$ (segundos)** | **Const. de desintegração $\lambda$ (segundos)** |
|---|---|---|
| $U^{235}$ | $2{,}2501 \times 10^{16}$ | $3{,}0805 \times 10^{-17}$ |
| $Th^{231}$ | 88560 | $7{,}8268 \times 10^{-6}$ |
| $Pa^{231}$ | $1{,}0098 \times 10^{12}$ | $6{,}8642 \times 10^{-13}$ |


**Figura 2:** Série de desintegração radioativa do Actinio (ZILL, 2003).

Como um exemplo de aplicação, utilizaremos os dados dos 3 primeiros elementos da cadeia do actínio de forma a obter um sistema linear de três equações diferenciais de primeira ordem, sendo este o modelo matemático que descreve a desintegração radioativa dos três primeiros elementos da série. O sistema a ser resolvido é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3{,}0805\text{x}10^{-17x}x \\ \dfrac{dy}{dt} = 3{,}0805\text{x}10^{-17}x - 7{,}8268\text{x}10^{-6}y \\ \dfrac{dz}{dt} = 7{,}8268\text{x}10^{-6}y - 6{,}8642\text{x}10^{-13}z \end{cases}$$

## 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a solução de sistemas do tipo proposto aplicamos as propriedades de autovalores e autovetores da álgebra linear (LEON, 2008). A partir do polinômio característico da matriz que descreve o sistema calculamos as raízes, que são os autovalores:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3{,}0805\text{x}10^{-17} - \lambda & 0 & 0 \\ 3{,}0805\text{x}10^{-17} & -7{,}8268\text{x}10^{-6} - \lambda & 0 \\ 0 & 7{,}8268\text{x}10^{-6} & -6{,}8642\text{x}10^{-13} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dados por $\lambda_U = -3{,}0805x10^{-17}$, $\lambda_T = -7{,}8268x10^{-6}$, $\lambda_P = -6{,}8642x10^{-13}$. Para cada autovalor temos um autovetor associado:

$$K_U = \begin{bmatrix} 1 \\ 3{,}9358x10^{-12} \\ 4{,}5109x10^{-5} \end{bmatrix} \qquad K_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad K_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a solução geral do sistema proposto é a combinação linear dos três vetores solução, e é escrita como:

$$X = C_U \begin{bmatrix} 1 \\ 3{,}9358x10^{-12} \\ 4{,}5109x10^{-5} \end{bmatrix} e^{-3{,}0805x10^{-17}t} + C_T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-7{,}8268x10^{-6}t} + C_P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-6{,}8642x10^{-13}t}$$

As expressões listadas abaixo mostram que a solução geral do sistema, dado anteriormente em termos matriciais pode ser escrita por funções individuais que expõe a relação entre as constantes.

$$x = C_U e^{-3{,}0805x10^{-17}t}$$

$$y = 3{,}9358x10^{-18} C_U e^{-3{,}0805x10^{-17}t} + C_T e^{-7{,}8268x10^{-6}t}$$

$$z = 4{,}5109x10^{-5} C_U e^{-3{,}0805x10^{-17}t} - C_T e^{-7{,}8268x10^{-6}t} + C_P e^{-6{,}8642x10^{-13}t}$$

Podemos interpretar essas equações através da análise gráfica que mostra o comportamento exponencial para o decaimento dos elementos da série, onde observamos que a partir da desintegração do 2º elemento sempre haverá a contribuição, mesmo que muito pequena, da desintegração dos elementos anteriores.

## 4 CONCLUSÃO

Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações cientificas e industriais envolvem resolução de um sistema linear em alguma etapa. Usando os métodos disponíveis na literatura, muitas vezes é possível reduzir um problema sofisticado a um único sistema de equações lineares, de maneira que a solução desse sistema seja uma combinação ordenada de números que satisfaça todas as equações. O próximo passo deste trabalho é implementar computacionalmente o problema abordado, bem como estender o estudo para toda a cadeia do actínio.

## 5 REFERÊNCIAS

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais Ordinárias com Aplicações em Modelagem**. São Paulo: Thomson, 2003

LEON, Steven J. **Álgebra Linear com Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel B. **Equações diferenciais**. Porto Alegre: Bookman, 2008.