TRANSFORMAÇÕES CONFORMES E O PRINCÍPIO DE RIEMANN-SCHWARZ

NORNBERG, Gabrielle Saller[1]; **VENZKE, Cristiane Schwartz**[2]; **BOURCHTEIN, Andrei**[3]

[1]Acadêmica de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas – UFPEL, gabillysn@hotmail.com; [2]Acadêmica de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas – UFPEL, crisvenzke@hotmail.com; [3]Doutor e Professor da Universidade Federal de Pelotas – UFPEL, Departamento de Matemática e Estatística, andburstein@gmail.com.

1 INTRODUÇÃO

O conceito de transformação conforme é muito importante dentro da matemática, tanto por seu caráter teórico quanto do ponto de vista aplicativo. Um exemplo muito conhecido trata-se das projeções que podem ser estabelecidas da esfera, que é uma boa aproximação da superfície da Terra, para o plano.

No entanto, seja qual for a área de estudo ou a utilização de uma transformação conforme, é essencial que se tenha em mente a modificação causada por cada função elementar, para que se consiga identificar aquela responsável por transformar uma região à outra. Mais além, dentro da teoria das transformações conformes, necessita-se de tais conhecimentos para se construírem transformações de modo biunívoco, o que, na maioria das vezes, não é trivial, visto que existem infinitas formas de resolução para esses tipos de problemas.

Neste trabalho, procuraremos a transformação conforme responsável por levar uma dada região ao semiplano superior, utilizando, além das propriedades das funções elementares, o princípio de simetria de Riemann-Schwarz.

2 METODOLOGIA

O princípio de simetria de Riemann-Schwarz diz que, se temos uma região D, cuja fronteira contém o segmento γ do eixo real, e uma função $f(z)$ regular em D, contínua em $D \cup \gamma$, e assumindo valores reais no segmento γ; então a função $f(z)$ pode ser prolongada, analiticamente, da região D para a região D', que é simétrica à D em relação ao eixo real, sendo $F(z) = f(z)$ se $z \in D \cup \gamma$, e $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ para $z \in D'$. No entanto, este princípio pode ser generalizado, considerando, ao invés de γ, qualquer intervalo, onde a função $f(z)$, neste intervalo, tenha valores que preencham, também, um intervalo.

Consideremos, no plano Z, a região simplesmente conexa da Fig. 1. Pretendemos transformar tal região no semiplano superior. Para isso, vemos que não há uma função que transforme toda a região biunivocamente e, ao mesmo tempo, notamos que esta é simétrica em relação ao eixo imaginário.

Podemos, então, usar o princípio de simetria, fazendo um corte auxiliar (em vermelho) ao longo daquele eixo e tomando uma das partes simétricas (Fig. 2). Entretanto, ainda não é possível trabalhar, diretamente, com esta nova região e, por isso, utilizamos o princípio de Riemann-Schwarz novamente, observando que esta é simétrica em relação ao eixo real.

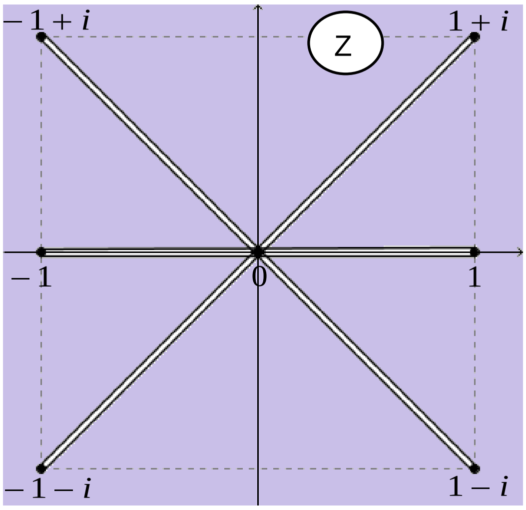
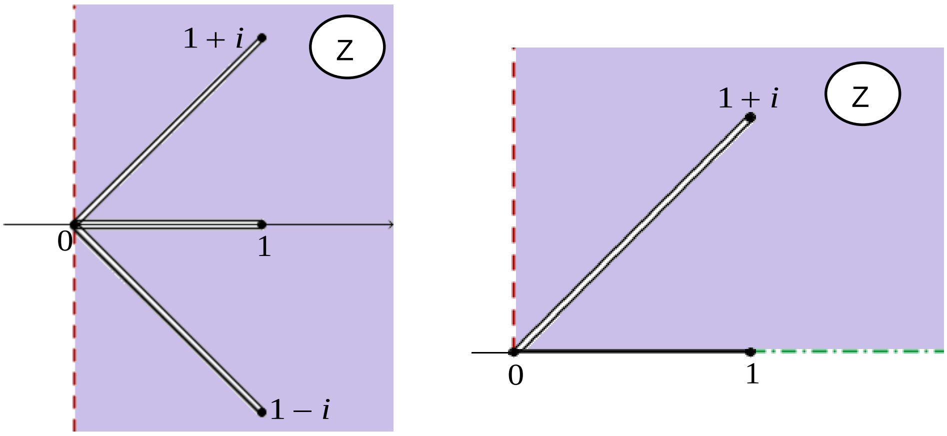


Figura 1. Região dada no plano Z.

Com a ajuda de outro corte (em verde), tomamos uma das partes simétricas (Fig. 3) que é uma região simplesmente conexa com corte no raio unitário que forma um ângulo $\pi / 4$ com a parte positiva do eixo real.



Figuras 2 e 3. Regiões no plano Z após aplicar o princípio de simetria.

Aplicando a função de potência $z_1 = z^4$ na região da Fig. 3, teremos que todos os ângulos em 0 esticar-se-ão 4 vezes, e o ponto $1+i$ será levado para $(1+i)^4 = -4$ (ângulo π) e, assim, o plano Z será transformado no plano Z_1 (Fig. 4).

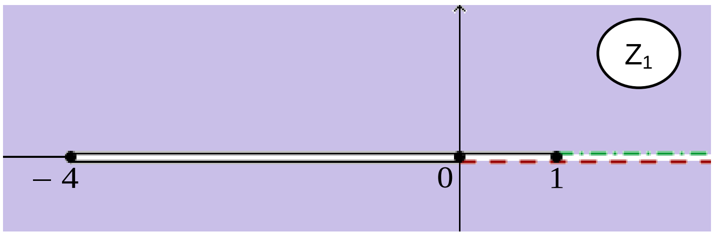
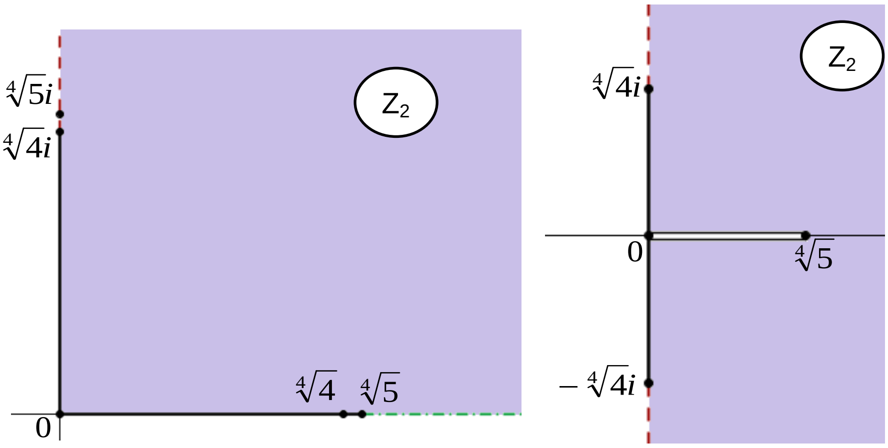


Figura 4. Região no plano Z_1.

Como nosso intuito é obter o semiplano superior, fazemos uma translação paralela de fator 4 para a direita, para que o corte da Fig. 4 tenha início na origem. Após, extraímos a raiz quarta de modo que a beira inferior do corte passe para a parte superior do eixo imaginário. Obtemos assim, a região da Fig. 5 e, ainda no plano Z_2, estendendo esta região pelo princípio de simetria, chegamos à região da Fig. 6.



Figuras 5 e 6. Regiões no plano Z_2, aplicando-se a função $z_2 = \sqrt[4]{z_1 + 4}$ e o princípio de simetria.

Realizando a rotação de um ângulo $\pi / 2$ no sentido anti-horário e elevando ao quadrado, obtemos a região abaixo.

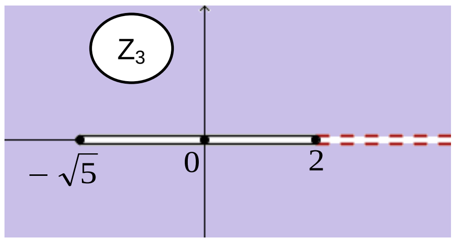
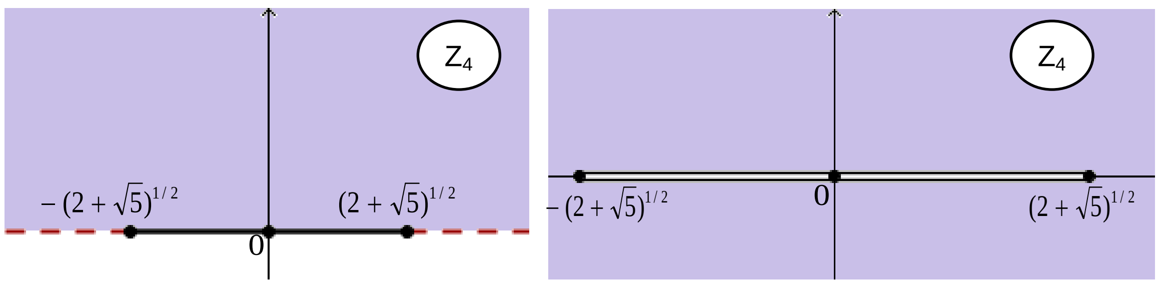


Figura 7. Região no plano Z_3 após usar a função $z_3 = (z_2 e^{\pi i/2})^2$.

Novamente, fazemos uma translação paralela para que o corte, desta vez mais simples, tenha início na origem e, após, extraímos a raiz quadrada, chegando à região da Fig. 8. Completando, simetricamente, esta região em relação ao eixo real pelo princípio de Riemann-Schwarz, ainda no plano Z_4, teremos a região da Fig. 9.

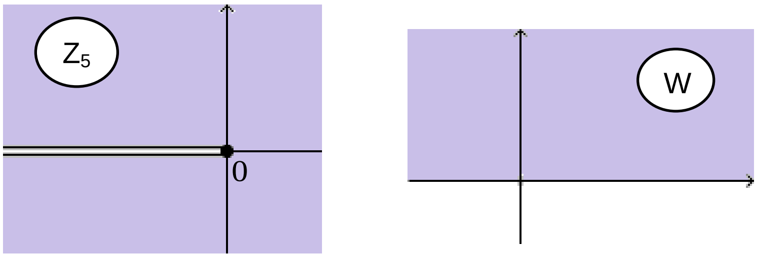


Figuras 8 e 9. Regiões no plano Z_4 com a função $z_4 = (z_3 + \sqrt{5})^{1/2}$.

Nesta situação, com a ajuda da aplicação homográfica

$$z_5 = \frac{z_4 - (2 + \sqrt{5})^{1/2}}{z_4 + (2 + \sqrt{5})^{1/2}},$$

transformamos o corte da Fig. 9 num corte com início na origem e percorrendo, infinitamente, a parte negativa do eixo real, de acordo com a Fig. 10. Desta forma, é muito simples aplicar a rotação de ângulo π e extrair a raiz quadrada, obtendo, finalmente, o semiplano superior, ou seja, o plano W, representado na Fig. 11.



Figuras 10 e 11. Regiões nos planos Z_5 e W, após aplicar a função homográfica e, posteriormente, a composta $w = (z_5 e^{\pi i})^{1/2}$.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

No exemplo construído, vimos que a região simplesmente conexa foi transformada, biunivocamente, para o semiplano superior mediante a composta de transformações conformes, o que não representa uma surpresa, pois do teorema da existência de Riemann segue que qualquer região simplesmente conexa não degenerada pode ser transformada a qualquer região, do mesmo tipo, conforme e univalentemente. É claro que tal teorema não descreve como encontrar a transformação em questão; apenas aponta que ela existe. Portanto, é importante salientar que haveria outras maneiras de transformar a região considerada no item 2, bem como outras regiões mais complexas que poderiam ser construídas.

4 CONCLUSÃO

O uso do princípio de simetria, em muitos casos, torna-se ferramenta crucial para que se possa realizar a transformação de determinada região. Seu uso, aliado às funções elementares (assim como há outros importantes critérios) em particular, ajuda a fornecer meios de encontrar transformações para as quais o teorema de Riemann garante a existência para regiões simplesmente conexas. Desta forma, a teoria das transformações conformes, cuja influência em diversas ciências é indiscutível, instiga-nos a pensar em situações mais complicadas, por exemplo, quando aumentamos o grau de conexão das regiões.

5 REFERÊNCIAS

AHLFORS, L.V. **Complex Analysis**. McGraw-Hill, 1953.

CARATHÉODORY, C. **Conformal Representation**. Dover Pub., 1998.

GARABEDIAN, P.R. **Partial differential equations**. Wiley & Sons, 1964.

KNUPP, P.; STEINBERG, S. **Fundamentals of grid generation**. CRC Press, 1993.

NEHARI, Z. **Conformal mapping**. Dover Pub., New York, 1997.

PEARSON, F., II. **Map projections: theory and applications**. CRC Press, 1990.

RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. McGraw-Hill, 1987.

SNYDER, J.P. **Flattening the Earth: two thousand years of map projections**. Univ. of Chicago Press, 1997.

THOMPSON, J.F.; WARSI, Z.U.A.; MASTIN, C.W. **Numerical grid generation: Foundations and applications**. North-Holland, 1985.