ESTUDO INTRODUTÓRIO DA LÓGICA FUZZY INTUICIONISTA INTERVALAR

DIAS, Marlon[1]; SANT'ANNA, Samuel[1]; VISINTIN, Lidiane[2]; REISER, Renata[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas – Graduação em Ciência da Computação, CDTEC
[2]Universidade Federal de Pelotas - Mestrado em Ciência da Computação, CDTEC
[3]Universidade Federal de Pelotas – PPGC, CDTEC, reiser@inf.ufpel.edu.br.

1 INTRODUÇÃO

A teoria dos conjuntos fuzzy (ZADEH, 1965) propõe uma generalização da teoria dos conjuntos em relação à dicotomia da relação de pertinência, e, por conseguinte, tem-se uma extensão para a Lógica Clássica. Tradicionalmente, a avaliação de proposições considera dois valores extremos: ou completamente verdadeira (1) ou completamente falsa (0). Entretanto, na Lógica Fuzzy (LF), tem-se a variação no grau de verdade de 0 até 1, permitindo uma interpretação mais flexível que inclui as noções de parcialmente verdadeira e parcialmente falsa. Os resultados significativos obtidos com o estudo no sentido estrito da LF fundamentam e potencializam seu uso em sistemas especialistas, em tomada de decisões baseada em conhecimentos vagos, imprecisos, incertos ou até mesmo subjetivos. Verifica-se sua aplicabilidade nas engenharias, na matemática e na computação, em áreas como reconhecimento de padrão, processamento de imagens e tomada de decisão.

Novas abordagens lógicas para tratamento de incertezas e imprecisão em sistemas especialistas têm sido propostas a partir da introdução da LF. Dentre as extensões, destacam-se lógicas do tipo-2 como: (i) a Lógica Fuzzy Intervalar (LI), modelando a incerteza no diâmetro do grau intervalar de pertinência (ZADEH,1975); e (ii) a Lógica Fuzzy Intuicionista (LFI), modelando além da incerteza, a hesitação ou indecibilidade relativa ao grau de não-pertinência (ATANASSOV;GARGOV,1998). Na integração destas abordagens, este trabalho considera a Lógica Fuzzy Intuicionista Intervalar (ATANASSOV;GARGOV, 1989), com importantes e atuais contribuições (CHEN,2007; BUSTINCE et al.,2008; JIANG;L., 2011).

O principal objetivo do trabalho é introduzir a definição de implicações intuicionistas intervalares pela aplicação de funções de agregação intervalares. Uma motivação para este estudo tem sido o significativo desempenho obtido pelo uso de implicações intervalares em algumas aplicações, como na área de processamento de imagens (BUSTINCE et al.,2007, BUSTINCE et al.,2008b, BUSTINCE et al.2010), (JURIO et al.,2011). Apesar do aumento nos parâmetros que modelam tais sistemas, as recentes soluções fazem uso de sistemas distribuídos e paralelização de etapas dos algoritmos aplicados (WEI: FAHN,1996; HALL,1995).

Os operadores de implicação (e dualmente, de coimplicação) são essenciais para os métodos dedutivos que usam o raciocínio aproximativo, interpretando as condicionais fuzzy em sistemas de dedução baseados em LF. Tanto na lógica clássica quanto na lógica fuzzy, tem-se a ocorrência de variadas formas de implicações. Salienta-se, entretanto, que extensões fuzzy de implicações não são equivalentes como na abordagem clássica, resultando em distintas classes de implicações (S-implicações, QL-implicações, R-implicações) e ainda, em diferentes formas de representação (explicita, implícita e axiomática) destes conectivos. Tal diversidade instiga o estudo de implicações intervalares no contexto da LFI.

Assim, na Seção 2, mostra-se que as implicações fuzzy intuicionistas intervalares podem interpretar o grau de verdade de regras condicionais concebidas segundo a extensão intervalar da LFI. A principal contribuição do trabalho está formalizada no Teorema 1, na Seção 3. Seguem a Conclusão e as Referências.

2 METODOLOGIA

Em BUSTINCE et al. (2004), mostra-se que uma implicação fuzzy intuicionista I_I pode ser obtida por um conjunto finito de funções de agregação $\mathcal{M}$ e por pares de funções mutuamente duais (I;I_N), determinados por uma implicação I e, na construção dual obtida a partir de uma negação forte N, por uma coimplicação I_N.

Segue-se então a mesma metodologia para mostrar que uma implicação fuzzy intuicionista intervalar $\mathbb{I}_I$ pode ser obtida por funções de agregação intervalares e por (co)implicações intervalares.

2.1. **Implicações e coimplicações intervalares.**

Seja $\mathbb{U}=\{[a_1,a_2] \mid 0\leq a_1,a_2\leq 1 \text{ e } a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ o conjunto de todos os subintervalos de números reis em [0,1], tais que $\mathbf{0}=[0,0]\leq[a_1,a_2]\leq[1,1]=\mathbf{1}$. As projeções l,r: $\mathbb{U}\rightarrow$U, são expressas por: $l([a_1,a_2])=a_1=inf(A)=\underline{A}$ e $l([a_1,a_2])=a_2=sup(A)=\bar{A}$ onde $A=[a_1,a_2]\in\mathbb{U}$.

Uma função de agregação intervalar $\mathbb{M}:\mathbb{U}^2\rightarrow\mathbb{U}$ é uma função comutativa, isotônica em ambos os argumentos e satisfazendo as seguintes condições de contorno: $\mathbb{M}(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbf{0}$ e $\mathbb{M}(\mathbf{1},\mathbf{1})=\mathbf{1}$. $\mathbb{M}$ é idempotente sempre que $\mathbb{M}(A,A)=A$, se $A\in\mathbb{U}$. As funções $\cap(A,B)=[\min\{a_1,b_1\}, \min\{a_2,b_2\}]$ e $\mathbf{U}(A,B)=[\max\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\}]$

Uma negação fuzzy $\mathbb{N}:\mathbb{U}\rightarrow\mathbb{U}$ é uma função decrescente satisfazendo as condições $\mathbb{N}(\mathbf{0})=\mathbf{1}$ e $\mathbb{N}(\mathbf{1})=\mathbf{0}$. Se, além disso, é involutiva, $\mathbb{N}(\mathbb{N}(A))=A$ onde $A\in\mathbb{U}$, então $\mathbb{N}$ é uma negação fuzzy forte. Neste trabalho, considera-se $\mathbb{N}_S(A)=\mathbf{1}-A=[1-a_2,1-a_1]$.

Uma (co)implicação intervalar ($\mathbb{J}$)$\mathbb{I}:\mathbb{U}^2\rightarrow\mathbb{U}$ satisfaz as condições ($\mathbb{J}$1)$\mathbb{I}$1:

$\mathbb{I}$1. $\mathbb{I}(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbb{I}(\mathbf{0},\mathbf{1})=\mathbb{I}(\mathbf{1},\mathbf{1})=\mathbf{1}$ **e** $\mathbb{I}(\mathbf{1},\mathbf{0})=\mathbf{0}$; $\mathbb{J}$1. $\mathbb{J}(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbb{J}(\mathbf{1},\mathbf{0})=\mathbb{J}(\mathbf{1},\mathbf{1})=\mathbf{0}$ **e** $\mathbb{J}(\mathbf{0},\mathbf{1})=\mathbf{1}$.

Seja $\mathbb{N}$ uma negação forte em $\mathbb{U}$. Uma coimplicação $\mathbb{I}_{\mathbb{N}}:\mathbb{U}^2\rightarrow\mathbb{U}$ é uma função $\mathbb{N}$–dual da implicação $\mathbb{I}:\mathbb{U}^2\rightarrow\mathbb{U}$ se, e somente se, $\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(X,Y)=\mathbb{N}(\mathbb{I}(\mathbb{N}(X), \mathbb{N}(Y)))$.

Sejam $\mathbb{A}=\{(x,M_A(x))|x\in\mathbb{X}\}$ e $\mathbb{B}=\{(y,M_B(x))|y\in\mathbb{Y}\}$ conjuntos fuzzy intervalares definidos sobre os conjuntos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, onde $M_{\mathbb{A}}(x):\mathbb{X}\rightarrow\mathbb{U}$ e $M_{\mathbb{B}}(x):\mathbb{Y}\rightarrow\mathbb{U}$ indicam funções de pertinência e os intervalos $M_{\mathbb{A}}(x)$ e $M_{\mathbb{B}}(y)$ determinam o grau intervalar de pertinência de $x\in\mathbb{X}$ ao conjunto $\mathbb{A}$ e $y\in\mathbb{Y}$ ao conjunto $\mathbb{B}$, respectivamente. Na LI, a regra condicional dada por (R_1)"se xé$\mathbb{A}$ então yé$\mathbb{B}$" pode ser definida por uma (co)implicação fuzzy intervalar, ou seja, $\mathbb{I}(M_{\mathbb{A}}(x),M_{\mathbb{B}}(y))$ interpreta o grau de verdade e $\mathbb{J}(1-M_{\mathbb{A}}(x),1-M_{\mathbb{B}}(y))$ o grau de não-verdade da condicional fuzzy referente a regra R_1.

2.2. **Implicações fuzzy intuicionistas intervalares.**

Seja $\tilde{\mathbb{U}}=\{(X_1,X_2)\in\mathbb{U}^2\ X_1+X_2\leq\mathbf{1}\}$ sendo $(\mathbf{0},\mathbf{1})\leq(X_1,X_2)\leq(\mathbf{1},\mathbf{0})$ sempre que $(X_1,X_2)\in\mathbb{U}^2$. Uma implicação fuzzy intuicionista intervalar $\mathbb{I}_I:\tilde{\mathbb{U}}^2\rightarrow\tilde{\mathbb{U}}$ satisfaz a condição $\mathbb{I}_I$1:

$\mathbb{I}$1. $\mathbb{I}_I((\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{1}))=\mathbb{I}_I((\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{0}))=\mathbb{I}_I((\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{1},\mathbf{0}))=(\mathbf{1},\mathbf{0})$ e $\mathbb{I}_I((\mathbf{1},\mathbf{0}), (\mathbf{0},\mathbf{1}))= (\mathbf{0},\mathbf{1})$;

Sejam os conjuntos fuzzy intuicionistas intervalares $\mathbb{A}=\{(x,M_A(x),N_A(x))|x\in\mathbb{X}\}$ e $\mathbb{B}=\{(y,M_B(y),N_B(y))|y\in\mathbb{Y}\}$ definidos sobre os conjuntos $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, respectivamente. Sejam as funções $M_{\mathbb{A}},N_{\mathbb{A}}:\mathbb{X}\rightarrow\tilde{\mathbb{U}}$ e $M_{\mathbb{B}},N_{\mathbb{B}}:\mathbb{Y}\rightarrow\tilde{\mathbb{U}}$ tais que $M_{\mathbb{A}}(x)$ e $1-N_{\mathbb{A}}(x)$ interpretam o grau de pertinência de $x\in\mathbb{X}$ ao conjunto fuzzy intuicionista intervalar $\mathbb{A}$ e $M_{\mathbb{B}}(y)$ e $1-N_{\mathbb{B}}(y)$ interpretam o grau de pertinência de $y\in\mathbb{Y}$ ao conjunto fuzzy intuicionista intervalar $\mathbb{B}$. Ambas interpretações são consideradas nas funções de agregação intervalares $\mathbb{M}_1(M_{\mathbb{A}}(x),1-N_{\mathbb{A}}(x))$ e $\mathbb{M}_2(M_{\mathbb{B}}(y),1-N_{\mathbb{B}}(y))$, interpretando o grau intervalar de petinência de x em $\mathbb{A}$ e de y em $\mathbb{B}$, respectivamente E, na cosntrução dual, as funções de agregação intervalares $M_3(1-M_{\mathbb{A}}(x),N_{\mathbb{A}}(x))$ e $\mathbb{M}_4(1-M_{\mathbb{B}}(y),N_{\mathbb{B}}(y))$ interpretam o grau intervalar de não-petinência de x em $\mathbb{A}$ e de não-pertinência de y em $\mathbb{B}$.

Na LFI, a regra condicional dada por (R_2) “se x é $\mathbb{A}$ então y é $\mathbb{B}$ ” pode ser definida por uma implicação fuzzy intuicionista intervalar. Tem-se as composições obtidas pela aplicação de pares de (co)implicações intervalares ($\mathbb{I};\mathbb{I}_{\mathbb{N}}$) nas equações:

$$\mathbb{I}(\mathbb{M}_1(M_{\mathbb{A}}(x),1-N_{\mathbb{A}}(x)),\mathbb{M}_2(M_{\mathbb{B}}(y),1-N_{\mathbb{B}}(y))) \text{ e } 1-\mathbb{I}(\mathbb{M}_3(1-M_{\mathbb{A}}(x),N_{\mathbb{A}}(x)),\mathbb{M}_2(1-M_{\mathbb{B}}(y),N_{\mathbb{B}}(y))),$$

interpretando o grau de verdade e o grau de não-verdade da condicional fuzzy referente a regra R_2, respectivamente.

Na Fig.1, apresenta-se um diagrama comutativo com o relacionamento entre os funções e os conjuntos que definem os domínios e contra-domínios envolvidos na interpretação da condicional fuzzy R_2 no contexto da extensão intervalar da LFI considerada neste trabalho.

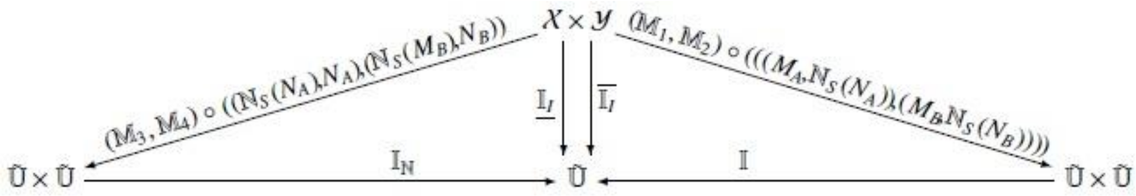

Figura 1. Interpretação da regra R2 por uma implicação fuzzy intuicionista intervalar.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com base nas discussões estabelecidas na seção anterior, apresenta-se uma expressão para uma implicação fuzzy intuicionista intervalar $\mathbb{I}_I$ gerada por um conjunto finito $\mathcal{M}_{\mathbb{I}}$ de agregações e pares de funções duais intervalares duais ($\mathbb{I};\mathbb{I}_{\mathbb{N}}$).

3.1 Teorema. Sejam $\mathbb{I}$ uma implicação intervalar e $\mathbb{I}_{\mathbb{N}}$ a coimplicação intervalar associada a $\mathbb{I}$ pela negação forte $\mathbb{N}$. Considere $\mathcal{M}_{\mathbb{I}}=\{\mathbb{M}_i\}_{i\in\{1,2,3,4\}}$ como um conjunto de funções de agregação intervalares idempotentes tais que para todo $X,Y \in \mathbb{U}$, tem-se:

$$\mathbb{M}_1(X,Y) + \mathbb{M}_3(\mathbb{N}(X),\mathbb{N}(Y))\geq[1,1] \quad \text{e} \quad \mathbb{M}_2(X,Y) + \mathbb{M}_4(\mathbb{N}(X),\mathbb{N}(Y))\leq[1,1].$$

Então, para todo $(X_1,X_2),(Y_1,Y_2)\in\tilde{\mathbb{U}}$ a função binária $\mathbb{I}_I:\tilde{\mathbb{U}}^2\to\tilde{\mathbb{U}}$ é uma implicação fuzzy intuicionista intervalar definida por:

$$\mathbb{I}_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2))=\mathbb{I}(\mathbb{M}_1(X_1, \mathbb{N}(X_2)),\mathbb{M}_2(Y_1, \mathbb{N}(Y_2))),\mathbb{I}_{\mathbb{N}}(\mathbb{M}_3(\mathbb{N}(X_1),X_2),\mathbb{M}_4(\mathbb{N}(Y_1),Y_2)).$$

Para melhor compreensão do Teorema 1, apresenta-se uma exemplificação:

3.2 Exemplificação. Sejam as funções de agregação em definidas por:

$$\mathbb{M}_1(X_1, X_2) = \mathbb{M}_3(X_1, X_2) = \mathbf{U}(X_1, X_2) \ \text{ e } \ \mathbb{M}_2(X_1, X_2) = \mathbb{M}_4(X_1, X_2) = \cap(X_1, X_2)$$

Considere também a versão intervalar para a implicação de Kleene-Dienes e sua correspondente coimplicação, obtida a partir da negação forte $\mathbb{N}_S$, e expressas por:

$$\mathbb{I}(X_1, X_2) = \mathbf{U}(\mathbb{N}_S(X_1), X_2) \quad \text{e} \quad \mathbb{I}_{\mathbb{N}}(X_1, X_2) = \cap(\mathbb{N}_S(X_1), X_2).$$

A versão intervalar para a implicação fuzzy intuicionista introduzida em ATANASSOV; GARGOV (1998) pode ser gerada aplicando o Teorema:

$$\mathbb{I}_I((X_1,X_2),(Y_1,Y_2))= [\mathbf{U}(X_2,Y_1),\cap(X_1,Y_2).$$

4 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos com o uso de agregadores e pares de funções duais para definição de implicações fuzzy intuicionistas intervalares estendem o trabalho introduzido por BUSTINCE et al. (2004). Na continuidade, busca-se aplicação da expressão genérica introduzida no Teorema para análise das principais classes das implicações fuzzy. Esta análise pode fundamentar o estudo de dois importantes tópicos: (i) a aplicação de K-operators sobre (co)implicações para construção de implicações fuzzy intuicionistas intervalares (REISERBEDREGAL,2011a); (ii) a obtenção da representação canônica de implicações fuzzy intuicionistas intervalares, estendendo os resultados introduzidos em (REISER;BEDREGAL, 2011b) .

5 REFERÊNCIAS

ATANASSOV, K. and GARGOV, G. Interval valued intuitionistic fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 31, n. 3, p. 343–349, 1989..

ATANASSOV, K. and GARGOV, G. Elements of intuitionistic fuzzy logic. **Fuzzy Sets and Systems**., v. 95 n. 1, p. 39–52, 1998.

BUSTINCE, H., BARRENECHEA, E., and MOHEDANO, V. Intuicionistic fuzzy implication operators, an expression and main properties. **Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, v. 12, n. 3, p. 387–406, 2004.

BUSTINCE, H., BARRENECHEA, E., AND PAGOLA, M. Relationship between restricted dissimilarity functions, restricted equivalence functions and normal en-functions: Image thresholding invariant. **Pattern Recognition Letters**, 29:525–536, 2008b.

BUSTINCE, H., PAGOLA, M., AND BARRENECHEA, E. Construction of fuzzy indices from fuzzy subsethood measures. Application to the global comparison of images. **Inf. Sci,** 177(3):906–929, 2007.

BUSTINCE, H., BARRENECHEA, E, FERNANDEZ, J., PAGOLA, M., MONTERO, J., AND GUERRA, C. Contrast of a fuzzy relation. **Inf. Sci.,** 180(8):1326–1344, 2010.

BUSTINCE, H., BARRENECHEA, E., and PAGOLA, M. Generation of interval-valued fuzzy and atanassov's intuitionistic fuzzy connectives from fuzzy connectives and from K_ operators: Laws for conjunctions and disjunctions, amplitude. **International Journal of Intelligent Systems**, v. 23, n. 6, p. 680–714, 2008.

CHEN, T.-Y. . A note on distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the hausdorff metric. **Fuzzy Sets and Systems**, v. 158, n. 22, p. 2523–2525, 2007.

HALL, L. O. A genetic approach to fuzzy clustering. In Proceedings of Neural, Parallel & Scientific Computations, volume I, page 191, Atlanta, GA**. Dynamic Publishers**. 1995.

JIANG, Y. . Corrigendum to " interval-valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties" [comput. math. appl. 60 (2010) 906-918]. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 61, n. 10, p. 3179, 2011.

JURIO, A., PAGOLA, M., MESIAR, R., AND BUSTINCE, H. Image magnification using interval information**. IEEE Transactions on Image Processing, PMID**: 21632304. 2011.

REISER, R. H. S. and BEDREGAL, B. C. . Generation of interval-valued fuzzy implications from k-operators. **In WIFL 2011**. Springer Series - Lecture Notes in Computer Science, 2011.

REISER, R. H. S. AND BEDREGAL, B. R. C. Representable coimplications from aggregation operators and duality principle. **In Proc. 7th EUSFLAT**, Aix-les-Bains. Atlantis Press(2011).

ZADEH, L. A. Fuzzy sets. **Information and Control**, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.

ZADEH, L. A.The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning - I. **Information Sciences**, v. 8, n. 3, p. 199–249, 1975.

WEI, C.-H. AND FAHN;, C.-S. A distributed approach to fuzzy clustering by genetic algorithms. In **Fuzzy Systems Symposium**, 1996. **Soft Computing in Intelligent Systems and Information Processing, volume Proceedings of the** 1996 Asian, p. 390–357, Kenting , Taiwan. IEEE Explore. 1996.