XVIII CIC XI ENPOS I MOSTRA CIENTÍFICA
Evoluir sem extinguir: por uma ciência do devir

Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra através do Teorema de Cauchy-Goursat

BECK, Vinicius Carvalho[1]; SUAZO, Germán Ramón Canahualpa[2].

[1] Aluno do Curso de Licenciatura em Matemática - IFM/UFPel;
Campus Universitário UFPEL – CEP 96010-900.vonoce@yahoo.com.br
[2] Professor do Departamento de Matemática e Estatística - IFM/UFPel;
Campus Universitário UFPEL – CEP 96010-900.gcsuazo@gmail.com

RESUMO

Existem várias demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra. A primeira tentativa formal de demonstrar o teorema foi feita por Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) já em 1746. Mas quem realmente conseguiu demonstrar o teorema foi Karl Friedrich Gauss (1777-1855) em sua tese de doutorado. Gauss e outros ainda publicaram outras demonstrações diferentes daquela. O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração que utiliza o Teorema de Cauchy-Goursat em uma prova por contradição.

Palavras-chave: Teorema Fundamental da Álgebra, Teorema de Cauchy-Goursat, Gauss.

INTRODUÇÃO

Desde que Gauss demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra em sua tese de doutorado, apareceram muitas outras demonstrações deste teorema. O próprio

Gauss publicou até o final de sua vida ainda mais 3 demonstrações, inclusive uma generalização considerando os coeficientes polinomiais como números complexos.

Muitas das demonstrações modernas do Teorema Fundamental da Álgebra utilizam ferramentas da análise complexa, tais como Teorema de Liouville, Teorema de Cauchy, Teorema de Picard, Princípio do Módulo Máximo, Raio de Convergência, etc.

Uma demonstração interessante do Teorema Fundamental da Álgebra é a que utiliza o Teorema de Cauchy-Goursat. A idéia é demonstrar que ao utilizar o Teorema de Cauchy-Goursat em uma integral específica e supor a negação do Teorema Fundamental, tem-se como resultado uma contradição.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada para a realização deste trabalho foi a pesquisa em artigos que apresentam demonstrações do Teorema Fundamental da Álgebra, seguida de discussões e análise crítica dos argumentos contidos nestes trabalhos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Definição: Sejam f uma função definida sobre $\mathbf{C}$ e R uma região aberta em $\mathbf{C}$. Dizemos que f é uma *função holomorfa (ou analítica) em* R*,* se existe a derivada f' em todos os pontos de R.

Teorema de Cauchy-Goursat: Seja f uma função holomorfa nos pontos interiores e na fronteira F de alguma região R. Então $\oint_F f(z)dz = 0$.

Teorema Fundamental da Álgebra: Seja P_n um polinômio não-constante com coeficientes complexos de grau n. Então P_n tem n raízes.

Demonstração:

Vamos primeiramente demonstrar que P_n admite pelo menos uma raiz complexa, isto é, existe $z_1 \in \mathbf{C}$ tal que $P_n(z_1) = 0$.

Por contradição, suponha que $P_n(z)$ não admite raiz complexa, ou seja, $P_n(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbf{C}$.

1) Primeiramente, suponha que $P_n(z) \in \mathbf{R}$, para todo $z \in \mathbf{R}$. Assim, ou $P_n(z) > 0$, para todo $z \in \mathbf{R}$, ou, $P_n(z) < 0$, $z \in \mathbf{R}$. Em qualquer caso, $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P_n(2\cos[\theta])} \neq 0$. Por outro lado, considere a igualdade das integrais $\frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{zP_n(z+z^{-1})} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1}dz}{z^n P_n(z+z^{-1})} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{z^{n-1}dz}{Q_n(z)}$, sendo $Q_n(z) = z^n P_n(z+z^{-1})$ um polinômio tal que $Q_n(z) \neq 0$, para $z \neq 0$ e $Q_n(0) = a_n \neq 0$, onde a_n é o coeficiente principal de $P_n(z)$. Desta forma, a função $\frac{z^{n-1}}{Q_n(z)}$ é holomorfa no círculo unitário por ser uma função racional (quociente de dois polinômios) e pelo Teorema de Cauchy-Goursat tem-se que $\frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{zP_n(z+z^{-1})} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{Q_n(z)} = 0$. Mas considerando a parametrização da circunferência unitária $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, tem-se que $\frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{zP_n(z+z^{-1})} = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}P_n\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P_n(2\cos[\theta])}$. Desta maneira, $0 \neq \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P_n(2\cos[\theta])} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z\,P_n(z+z^{-1})} = 0$, que constitui uma contradição.

2) Por outro lado, supondo que, $P_n(z) \in \mathbf{C}$, para algum $z \in \mathbf{R}$ (isto é, algum coeficiente não é real). Então o polinômio $R_{2n}(z) = P_n(z)\,\overline{P}_n(z)$, onde $\overline{P}_n(z)$ é o polinômio construído a partir de $P_n(z)$ usando os conjugados complexos de seus coeficientes, assume só valores reais para $z \in \mathbf{R}$. Pela parte 1 da prova, existe $z_1 \in \mathbf{C}$ tal que $R_{2n}(z_1) = P_n(z_1)\,\overline{P}_n(z_1) = 0$. Necessariamente, tem-se que $\overline{P}_n(z_1) = 0$, pois $P_n(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbf{C}$, entretanto tomando o conjugado em $\overline{P}_n(z_1) = \overline{a_n}z_1{}^n + \cdots + \overline{a_1}z_1 + \overline{a_0} = 0$, teremos, $P_n(\overline{z_1}) = a_n\overline{z_1}^n + \cdots + a_1\overline{z_1} + a_0 = \overline{0}$, ou seja, $P_n(\overline{z_1}) = 0$ contradição.

De 1 e 2, pode-se concluir que $P_n(z)$ admite pelo menos uma raiz complexa, ou seja, existe $z_1 \in \mathbf{C}$ tal que $P_n(z_1) = 0$. Pelo algoritmo da divisão, tem-se que $P_n(z) = (z - z_1)\,P_{n-1}(z)$, sendo $P_{n-1}(z)$ um polinômio de grau $n-1$. Aplicando o processo da prova ao polinômio $P_{n-1}(z)$, verifica-se que existe $z_2 \in \mathbf{C}$ tal que $P_n(z_2) = 0$ e $P_{n-1}(z) = (z - z_2)\,P_{n-2}(z)$, sendo $P_{n-2}(z)$ um polinômio de grau $n-2$. Observe que $P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)P_{n-2}(z)$. Este procedimento pode ser levado adiante até obter $P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)a_n$, onde a_n é, como antes, o coeficiente principal de $P_n(z)$.

cqd

CONCLUSÃO

Utilizando o Teorema de Cauchy-Goursat, é possível demonstrar que se P_n é um polinômio com coeficientes complexos de grau n, então P_n tem n raízes, considerando a multiplicidade algébrica delas. Este fato conduz a concluir que o corpo dos números complexos é algebricamente fechado, ou seja, para determinar as raízes de um polinômio com coeficientes complexos não é preciso recorrer a outro tipo de números. Isto não acontece com o corpo dos números reais ou racionais, por exemplo.

REFERÊNCIAS

[1] FILE, Dan; MILLER, Steven. **Fundamental Theorem of Algebra Lecture notes from the Reading Classics (Euler) Working Group, Autumm 2003**. Disponível em http://www.williams.edu/go/math/sjmiller/public_html/OSUClasses/683L/FundThmAlg_DFile.pdf

[2] BOAS Jr., R. P.. **Yet Another Proof of the Fundamental Theorem of Algebra**. Am Math Monthly 71 (1964), 180. Disponível em http://www.cut-the-knot.org/fta/boas.shtml

[3] FINE, Benjamin; ROSENBERGER, Gerhard. **The fundamental theorem of algebra**. Springer, 1997. ISBN 0387946578