XVIII CIC | XI ENPOS | I MOSTRA CIENTÍFICA
Evoluir sem extinguir: por uma ciência do devir

O Teorema da existência do caminho de comprimento ínfimo em um espaço métrico

BECK, Vinicius Carvalho[1]; **OLIVEIRA, Elismar R.** [2].

[1] *Aluno do Curso de Licenciatura em Matemática - IFM/UFPel;*
Campus Universitário UFPEL – CEP 96010-900. vonoce@yahoo.com.br
[2] *Professor do Departamento de Matemática e Estatística - IFM/UFPel;*
Campus Universitário UFPEL – CEP 96010-900. oliveira.elismar@gmail.com

RESUMO

O estudo dos espaços métricos tem um papel fundamental em áreas da matemática que não possuem estruturas diferenciáveis, daí a importância de se discutir qual a relação entre os objetos dentro dos espaços métricos. Este trabalho, desenvolvido como parte das atividades do GMPA – Grupo de Estudos de Matemática Pura e Aplicada – UFPEL/IFM/CNPq, tem como objetivo apresentar a demonstração do teorema da existência do caminho de comprimento ínfimo unindo dois pontos quaisquer em um espaço métrico.

Palavras-chave: espaços métricos, caminho contínuo, comprimento de um caminho.

INTRODUÇÂO

Quando estudamos superfícies em um espaço $\mathbf{R}^n$ e a métrica é dada pela integração da forma fundamental, temos a geometria diferencial. A mesma construção em variedades diferenciáveis é chamada geometria riemanniana.

Infelizmente, muitos estudos avançados em matemática não possuem estruturas diferenciáveis, mas sim métricas. É o caso do transporte ótimo de Monge-Kantorovich (ver [1], Ambrósio). Mesmo neste tipo de situação ainda é possível definir uma geometria da seguinte maneira: define-se o conceito de caminho contínuo e a noção de comprimento de arco usando-se a métrica natural. É introduzido então um princípio de seleção: “o menor comprimento entre todos os caminhos unindo dois pontos quaisquer”.

Seguindo a notação das geometrias diferencial e riemanniana, adota-se o nome geodésica para tais caminhos. Assim definem-se as retas da geometria. Por se tratar de uma generalização, aparecem várias perguntas sobre consistência, unicidade e existência destes objetos. Nesta exposição, estamos interessados particularmente pela existência do caminho de comprimento ínfimo que une dois pontos em um espaço métrico.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada para a realização deste trabalho foi à pesquisa em livros e artigos que introduzem e exploram a geometria dos espaços métricos, bem como a relação entre o comprimento de caminhos contínuos e outros objetos dos espaços métricos.

Nossa pesquisa tem como foco espaços métricos para os quais sempre existam caminhos contínuos unindo dois pontos quaisquer, por isso aqui serão considerados somente espaços métricos conexos por caminhos (ver [2], Lima).

RESULTADOS E DISCUSSÂO

Definição: Dizemos que um espaço métrico M é um *espaço métrico próprio*, se $\forall x \in M$ a função $d_{x_0}: M \to [0,+\infty)$ definida por $x \to d(x, x_10$) é própria no sentido usual (isto é, se a imagem inversa de qualquer conjunto compacto de $[0,+\infty)$ é subconjunto compacto de M).

Definição: Definimos $\wp([a,b])$ como sendo o conjunto de todas as partições de um intervalo real $[a,b]$. Sejam $P \in \wp([a,b])$ e $\gamma: [a,b] \to M$ um caminho contínuo. A cada partição $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_k = b\}$ do intervalo $[a,b]$, associamos um *número real* $l(\gamma, P)$, *tal que* $l(\gamma, P) = \sum_{i=1}^{k} [\![d([\![\gamma(t]\!]_i),]\!][\gamma(t]\!]_{i-1}))$. Se o conjunto dos números $l(\gamma, P)$, assim obtidos das partições $P \in \wp([a,b])$ for limitado uniformemente, então dizemos que γ é um *caminho retificável*, chamamos o número $\sup\{l(\gamma, P)\}$ de *comprimento do caminho* γ e o denotamos simplesmente por $l(\gamma)$.

Observação: Caso o espaço M seja vetorial, então $l(\gamma(t)) = \int_a^b \left\| \frac{d\gamma(t)}{dt} \right\| dt$.

Lema 1: Seja M um espaço métrico próprio. Sejam $k \in \mathbb{R}, k \geq 0$ e $\gamma_n: [a,b] \to M$, um caminho parametrizado proporcionalmente ao comprimento de arco $l(\gamma)$ e satisfazendo $l(\gamma_n) \leq k,$ $\forall n \geq 0$. Supomos ainda que o subconjunto $[\![\{\gamma]\!]_n(a), n \geq 0\}$ de M é limitado. Então a sequência de caminhos $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ tem uma subsequência que converge uniformemente para um caminho γ , com $l(\gamma) \leq k$.

Observação: O Lema 1 pode ser demonstrado a partir do Teorema de Arzelá-Ascoli (ver [3], Papadoulos, Teorema 1.4.9) , usando o fato de que $l(\gamma_n) \leq k$ para obter a limitação uniforme.

Lema 2: Seja $(\gamma_n : [a,b] \to M)_{n\geq 0}$ uma sequência de caminhos que converge uniformemente para um caminho $\gamma : [a,b] \to M$. Então $l(\gamma) \leq \lim_{n\to+\infty} l(\gamma_n)$.

Observação: Este resultado é consequência da semicontinuidade inferior da função $l(\gamma)$ (ver [3], Papadoulos, Teorema 1.4.4).

É sabido da análise que toda função semicontínua inferior, em um conjunto compacto, atinge seu valor ínfimo. Como consequência disto, temos o teorema a seguir.

Teorema da existência do caminho de comprimento ínfimo: Seja M um espaço métrico próprio. Sejam $x, y \in M$. Supomos que exista um caminho retificável em M unindo x e y. Então existe um caminho cujo comprimento é o ínfimo dos comprimentos dos caminhos que unem x e y .

Demonstração:

Seja $\alpha = \inf \{l(\gamma)\}$, onde γ é um caminho unindo x e y. Seja $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de caminhos unindo x e y , tal que $\lim_{n\to+\infty} l(\gamma_n) = \alpha$. Note que $\alpha < +\infty$, pois existe, por hipótese, γ retificável, e portanto, com $l(\gamma) < +\infty$. Sem perda de generalidade, assumimos que $n \geq 0$, γ_n é parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco e seu domínio é o intervalo $[0,1]$.

Do lema 1, sabemos que existe uma sequência de $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ que converge uniformemente para o caminho γ . Isto implica que γ é um caminho que une x e y .

Do lema 2, sabemos que $l(\gamma) \leq \lim_{n\to+\infty} l(\gamma_n) = \alpha$. Por outro lado, da definição de α temos que $l(\gamma) \geq \alpha$.

Logo, $l(\gamma) = \alpha$.

cqd

Definição: Dizemos que um espaço métrico (M,d) é um *espaço de comprimento*, se para quaisquer $x, y \in M$, tem-se $d(x,y) = \inf l(\gamma)$. Neste caso, dizemos que d é uma *métrica de comprimento* e o caminho γ de comprimento $\inf l(\gamma)$ é chamado *geodésica minimal*.

Com base nos resultados anteriores, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema: Seja $M = C^0[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbf{R}\}$, onde as funções f são funções contínuas com a norma do supremo $\|f\|_\infty = \sup|f(x)|$. Neste caso, (M,d) é um espaço métrico com a métrica $d : M \times M \to \mathbf{R}$ dada por $d(f,g) = \|f - g\|_\infty$. Então (M,d) é um espaço métrico de comprimento, mais precisamente, para quaisquer $f, g \in M$ existe um caminho diferenciável $\gamma_0(t) = (1-t)\,f(x) + t\,g(x)$, tal que $l(\gamma_0) = \min\{l(\gamma) | \gamma(0) = f(x) e\ \gamma(1) = g(x)\} = d(f,g)$.

.

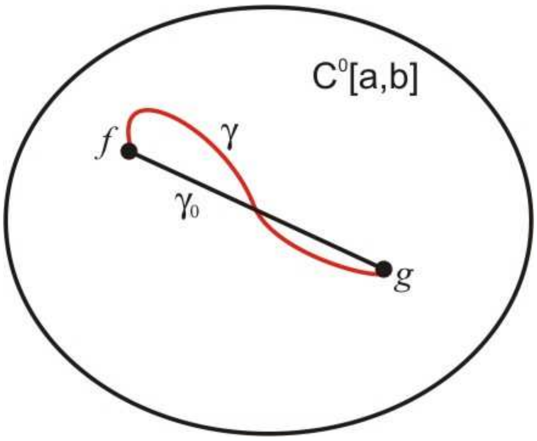
Demonstração:

Primeiro, reescrevemos γ_0 como $\gamma_0(t) = f(x) + t\,(g(x) - f(x))$, então podemos calcular o vetor tangente $\frac{d\gamma_0(t)}{dt} = g(x) - f(x)$ que é constante em relação a t, logo:

$$l(\gamma_0) = \int_0^1 \left\| \frac{d\gamma_0(t)}{dt} \right\|_\infty dt = \int_0^1 \|f - g\|_\infty \, dt = \int_0^1 d(f,g)\, dt = d(f,g).$$

Ou seja, γ_0 é uma geodésica minimal, pois $l(\gamma_0) = d(f,g) \leq l(\gamma)$, para todo caminho γ tal que $\gamma(0) = f(x)$ e $\gamma(1) = g(x)$.

cqd



A geodésica minimal (em preto) e os demais caminhos que unem f e g (em vermelho).

Observação: Isto mostra que $C^0[a,b]$ é um espaço de comprimento**.** A curva dada pelo teorema acima não é, necessariamente**,** a única geodésica minimal unindo f a g. Já que $C^0[a,b]$ é vetorial pode-se mostrar facilmente que a função comprimento $l: H(f,g) \to \mathbf{R}$, onde $\mathbf{H}(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \{\gamma | \gamma(0) = f(x)$ e $\gamma(\mathbf{1}) = g(x)\}$, é convexa, e portanto, o conjunto das geodésicas minimais é convexo também.

CONCLUSÃO

Para que exista um caminho de comprimento ínfimo unindo dois pontos quaisquer x, y de um espaço métrico M, é suficiente que M seja próprio e que admita um caminho retificável unindo x e y.

REFERÊNCIAS

[1] AMBROSIO, Luigi; GIGLI, Nicola; SAVARÉ, Giuseppe. **Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures**. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2000.

[2] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1977.

[3] PAPADOULOS, Athanase. **Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature**. European Mathematical society, ISBN: 3-03719-010-8.

[4] SEMMES, Stephen. **An introduction to the geometry of metric spaces**. Rice University, arXiv: 0709.4239v1 [math.MG], 26 Sep 2007.