



A FÍSICA-MATEMÁTICA POR TRÁS DO SISTEMA DE LORENZ

SCHUCH, Daniel¹; HENRIQUES, E. F²

1-Faculdade de Meteorologia - UFPEL underschuch@gmail.com, 2-Instituto de Física e Matemática - UFPEL efontes_henriques@hotmail.com

INTRODUÇÃO

As equações de Lorenz [1] foram extensivamente estudadas por mais de quatro décadas e continuam, ainda hoje, sendo objeto de estudo devido suas características de sensibilidade às condições iniciais e também alta não-linearidade, como mencionado por Xiong [2] e Fiedler [3]. Além disso, este sistema possui uma riqueza estrutural e dinâmica representada de uma forma simples, por esse motivo é constantemente abordado na literatura [4-6].

O problema físico é estabelecer um modelo bidimensional que represente o escoamento de um fluido em contato com uma camada inferior mais aquecida e uma camada superior mais fria e estabelecer os parâmetros Hidrodinâmicos relacionados ao movimento e temperatura no fluido. Conforme a *figura 1*, teremos padrões de temperatura e fluxos sendo estabelecidos pelo fluido entre as duas camadas.

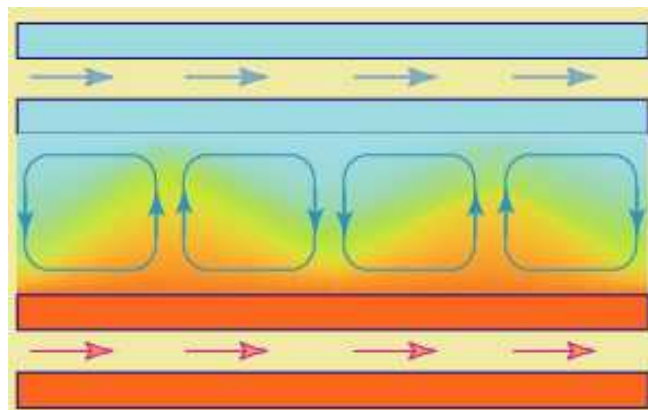


Figura 1, diferentes padrões de temperatura e circulação no interior de um fluido

Considerando a dificuldade da questão e a tendência da literatura a apresentá-la de forma muito resumida, fizemos nesse trabalho uma cuidadosa revisão autônoma dos procedimentos matemáticos básicos como parte do trabalho para a compreensão do sistema de Lorenz, desde suas bases hidrodinâmicas, para tomar consciência clara das dificuldades envolvidas.

MATERIAIS E MÉTODOS

Tendo escolhido as equações básicas do movimento, na aproximação de Boussineq e Oberbeck, reescritas por Salzman [7], simplificadas para duas dimensões, dadas por (1-5):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \nabla^2 u = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} - g \varepsilon T_1 - \nu \nabla^2 w = 0, \quad (2)$$

$$\frac{DT_1}{Dt} - \kappa \nabla^2 T_1 = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$\rho = \frac{\rho_{AV}}{1 + \varepsilon T_1}. \quad (5)$$

As equações (1) e (2) são as duas componentes da equação de Navier-Stokes, representando o balanço de momento para um campo de velocidades bidimensional de componentes u e w , (3) é a equação de transporte de calor, (4) é a equação de continuidade simplificada para as condições do problema e (5) é uma equação expressando a densidade em função da temperatura. Em virtude de (4) definimos uma função de corrente ψ como se segue:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, w = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6)$$

aqui o fluido em consideração está entre duas camadas de altura H fixa e está sujeito a seguintes condições de contorno para a temperatura média: $\overline{T_0}(0)$, no limite inferior, e $\overline{T_0}(H)$ no limite superior do domínio do problema. A diferença entre esses valores é expressa por $\Delta T_0 = \overline{T_0}(0) - \overline{T_0}(H)$. Expandindo T_1 em sua média dependente do tempo ($\overline{T_1}(0, t)$) em $z=0$ e um termo de variação linear dessa temperatura média com a altura até $z=H$ e, por fim, um termo de perturbação no perfil linear da temperatura:

$$T_1(z, t) = \left[\overline{T_1}(0, t) - \frac{\Delta T_0}{H} z \right] + \theta, \quad (7)$$

onde θ é uma perturbação em relação ao perfil linear de temperatura com a altura z e é nulo em $z=0$ e $z=H$.

Considerando que as temperaturas na camada superior e inferior são constantes devido ao constante aquecimento ou resfriamento, teremos:

$$\frac{\partial \overline{T_1}(0)}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \overline{T_1}(H)}{\partial t} = 0. \quad (8a-8b)$$

Derivando (1) em relação a z , e (2) em relação a x e subtraindo a primeira equação resultante da segunda, em seguida substituindo (6) obtemos (9a), onde já não temos mais a dependência da pressão. Em (3) substituímos (6) e (7) onde obtemos (9b):

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi - g\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \nabla^4 \psi = 0, \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\Delta T_0}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \kappa \nabla^2 \theta = 0. \quad (9b)$$

Aqui (9a) representa o par de equações de Navier-Stokes, enquanto (9b) representa a equação de condução do calor.

O sistema pode ser reescrito de forma adimensional fazendo as seguintes substituições: $x = Hx^*$, $z = Hz^*$, $t = (1/H^2)t^*$, $\nabla^2 = (1/H^2)\nabla^{*2}$, $\psi = \kappa\psi^*$ e $\theta = (\kappa\nu/g\varepsilon H^3)\theta^*$, ficando nessa forma:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \nabla^{*2} \psi^* - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial x^*} \nabla^{*2} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \nabla^{*2} \psi^* - \sigma \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} - \sigma \nabla^{*4} \psi^* = 0, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} - R \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} - \nabla^{*2} \theta^* = 0, \quad (10b)$$

onde $\sigma = \nu/\kappa$ é o Número de Prandtl.

A partir daí, assumimos que as funções de corrente e temperatura podem ser expressas por um somatório de uma série de Fourier com comprimentos L no eixo x e 2H no eixo z sendo escrita na seguinte forma:

$$\psi^*(x^*, y^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi(m, n, t^*) \exp\left[2\pi Hi \left(\frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^*\right)\right], \quad (11a)$$

$$\theta^*(x^*, y^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(m, n, t^*) \exp\left[2\pi Hi \left(\frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^*\right)\right], \quad (11b)$$

onde m é o numero de onda na direção-x e n é o numero de onda na direção-y e os coeficientes complexos são:

$$\Psi(m, n, t^*) = \frac{1}{2HL} \int_0^L \int_{-H}^H \psi^*(x^*, z^*, t^*) \exp\left[-2\pi Hi \left(\frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^*\right)\right] dx dz, \quad (12a)$$

$$\Theta(m, n, t^*) = \frac{1}{2HL} \int_0^L \int_{-H}^H \theta^*(x^*, z^*, t^*) \exp\left[-2\pi Hi \left(\frac{m}{L} x^* + \frac{n}{2H} z^*\right)\right] dx dz. \quad (12b)$$

Para conformidade entre (12) e (11), é necessário que Ψ e Θ sejam funções não de m , n , t^* , o que não tem sentido, e sim de x^* , y^* e t^* :

$$\frac{a}{\kappa(a^2 + 1)} \psi = X \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi a}{H} x^*\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{H} z^*\right), \quad (13a)$$

$$\frac{R}{R_c} \frac{\pi}{\Delta T_0} \theta = Y \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi a}{H} x^*\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{H} z^*\right) - Z \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{H} z^*\right), \quad (13b)$$

onde a é a razão entre a altura H e o comprimento L, e $R = (g\varepsilon H^3 \Delta T_0) / \kappa\nu$ o Número de Rayleigh, ΔT_0 é a diferença de temperatura entre as alturas $z=0$ e $z=H$. Quando o Número de Rayleigh ultrapassa um valor crítico dado por $R_c = \pi^4 (1 + a^2)^3 / a^2$, a convecção tem inicio.

X, Y e Z são funções autônomas que dependem apenas da condição hidrodinâmica do

fluido e correspondem às variáveis de $X = A = \Psi_1(t^*)$, $Y = D = \Theta_2(t^*)$ e $Z = G = \Theta_2(t^*)$ de Saltzman [4], onde foram escolhidos alguns valores para m e n que representem o problema em poucos termos.

A Variável X será proporcional ao movimento convectivo, Y é proporcional a diferença de temperatura do fluido ascendente e descendente e Z é proporcional a distorção do perfil de temperatura vertical do perfil linear, que indica fortes gradientes verticais de temperatura.

Substituindo (13) em (10), os termos podem ser somados e separados em três equações de acordo com as semelhanças de suas partes trigonométricas. Depois de separados em três novas funções, ignoramos a parte trigonométrica, dessa forma o sistema com extensão infinita fica restrito a um domínio finito, conforme Lorenz [1], e assim obtemos como resultado seguinte o sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial \tau} = \sigma(Y - X) \\ \frac{\partial Y}{\partial \tau} = rX - Y - XZ \\ \frac{\partial Z}{\partial \tau} = XY - bZ \end{cases} \quad (14)$$

Como solução, onde $b = 4/(a^2 + 1)$, e R/R_c foi substituído por r , dessa forma quando r ultrapassar 1 a convecção terá início, e o termo $\tau = (t^*)H^2\kappa/(a^2 + 1)$ é o tempo característico do problema, que não possui solução analítica conhecida devido a sua natureza não-linear.

RESULTADOS

Foram obtidas as Equações do sistema de Lorenz analiticamente, de forma que todos os parâmetros envolvidos ficassem evidentes e assim novos sistemas de ordem mais alta podem ser facilmente compostos na tentativa de representar outros sistemas Hidrodinâmicos instáveis por meio de equações diferenciais de primeira ordem. Em caso de apresentar comportamento caótico, o uso das ferramentas de teoria do caos como descritas em Fiedler [3] e Parker [8] podem ser empregadas para resolver o problema.

CONCLUSÃO

O Problema tratado por Lorenz, mesmo não sendo uma solução definitiva ao problema proposto, é de difícil manipulação e resolução, e a literatura comumente condensa o problema de uma forma em que não fica claro o significado dos termos e procedimentos adotados. Dessa forma o Sistema de Lorenz foi obtido das equações iniciais da Hidrodinâmica e apresentado aqui de forma clara e objetiva.

REFERÊNCIA:

- [1] LORENZ, E. N.. Deterministic nonperiodic flow. **J. Atmos. Sciences**, n. 20, p.130, 1963.
- [2] XIONG X; WANG J. Conjugate Lorenz-type chaotic attractors. **Chaos, Solitons & Fractals**, ago. 2008.
- [3] FIEDLER-FERRARA e CINTRA do PRADO, **Caos uma Introdução**, 1995.

- [4] HAIRER, H.; NØRSETT, S. P.; WANNER, G.. **Solving Ordinary Differential Equations I Nonstiff Problems**. 1965.
- [5] HOLTON, James R.. **An Introduction to Dynamic Meteorology**. 4^a ed. United States of America: Elsevier/Academic Press, 2004
- [6] PROVENZALE; BALMFORTH. **Chaos and Structures in Geophysics and Astrophysics**.
- [7] SALTZMAN, Barry. Finite Amplitude Free Convection an Initial Value Problem-I, **J. Atmos. Sciences**, p 239, 1962.
- [8] PARKER, T.S. e Chua, L.O.. **Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems**. Springer-Verlag, New York 1989.