



Uma hierarquia de testes de comparação para séries numéricas não-negativas

Autor(es): NORBERG, Gabrielle Saller; VENZKE, Cristiane Schwartz

Apresentador: Gabrielle Saller Nornberg

Orientador: Andrei Bourchtein

Revisor 1: Maurício Zahn

Revisor 2: Luiz Alberto Brettas

Instituição: Universidade Federal de Pelotas

Resumo:

Séries infinitas representam um assunto atraente visto que surgem naturalmente da resolução de vários problemas de aplicação. Os objetos deste estudo são as séries numéricas não-negativas e os teoremas usados para analisar o seu comportamento. Entre os testes de convergência para séries não-negativas, os da comparação, da razão e da raiz são bem conhecidos e apresentados em disciplinas de Cálculo e Análise. No entanto, os testes mais sofisticados são, normalmente, omitidos por falta de tempo, embora representem técnicas importantes na investigação do comportamento de séries. Além disso, a introdução de algumas das técnicas avançadas permite entender melhor a lógica de construção de testes, suas interligações e seus limites. Neste trabalho, estudamos os testes de Raabe e de Gauss que são generalizações do teste da razão. Os testes da razão e da raiz são baseados na comparação com séries geométricas. Logo, não é uma surpresa que eles não podem ser aplicados às séries cuja convergência é mais lenta do que a das geométricas. Por exemplo, é bem conhecido que os testes da razão e da raiz não funcionam na investigação de séries harmônicas generalizadas e deriváveis dessas. As últimas são séries importantes, surgindo em várias aplicações; portanto, é essencial ter ferramentas para o estudo da sua convergência. O teste de Raabe é destinado, em particular, para resolver este problema. A formulação deste teste é baseada na comparação com as séries harmônicas generalizadas e, por isso, tem a forma mais refinada do que a do teste da razão. No entanto, o teste de Raabe não permite tratar outras séries importantes; por exemplo, as hipergeométricas, o que leva ao próximo passo: introdução do teste ainda mais fino de Gauss. A comparação entre os testes revela que, quando o teste da razão é aplicável, então o de Raabe também é, e o último leva na aplicabilidade do teste de Gauss. As implicações recíprocas não são válidas, o que pode ser conferido pelos exemplos clássicos de séries harmônicas e hipergeométricas. Além dessas séries, elaboramos outros exemplos que permitem distinguir as situações quando se aplica só o teste de Gauss ou quando podem ser aplicados os testes de Gauss e de Raabe. Finalmente, consideramos o método geral de refinamento de testes de séries não-negativas – o de Kummer – que permite construir testes mais finos que o de Gauss, utilizando a comparação com as séries convergentes com menor velocidade que a série hipergeométrica.