

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS**  
**Instituto de Física e Matemática**  
**Curso de Bacharelado em Física**



**Trabalho de Conclusão de Curso**

**A mecânica newtoniana modificada como alternativa à matéria escura**

**Eduardo Henrique Mossmann**

**Pelotas, 2021**



**Eduardo Henrique Mossmann**

**A mecânica newtoniana modificada como alternativa à matéria escura**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter

Pelotas, 2021



Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas  
Catalogação na Publicação

M913m Mossmann, Eduardo Henrique

A mecânica newtoniana modificada como alternativa  
à matéria escura / Eduardo Henrique Mossmann ; Werner  
Krambeck Sauter, orientador. — Pelotas, 2021.

52 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em  
Física) — Instituto de Física e Matemática, Universidade  
Federal de Pelotas, 2021.

1. Matéria escura. 2. Dinâmica newtoniana  
modificada. I. Sauter, Werner Krambeck, orient. II. Título.

CDD : 523.01

Elaborada por Ubirajara Buddin Cruz CRB: 10/901

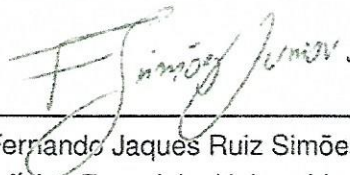
Eduardo Henrique Mossmann

A mecânica newtoniana modificada como alternativa à matéria escura

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

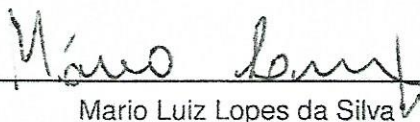
Data da defesa: 12 de fevereiro de 2021

Banca Examinadora:



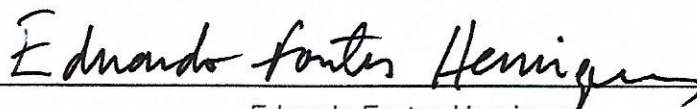
---

Fernando Jaques Ruiz Simões Junior  
Doutor em Geofísica Espacial – Universidade Federal de Pelotas



---

Mario Luiz Lopes da Silva  
Doutor em Física – Universidade Federal de Pelotas



---

Eduardo Fontes Henriques  
Doutor em Física – Universidade Federal de Pelotas

## **AGRADECIMENTOS**

Os agradecimentos devidos devem ser feitos ao Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter, pela orientação ao longo de todo o projeto de Iniciação Científica e pelos conselhos direcionados ao presente Trabalho de Conclusão de Curso. Da mesma forma, agradeço ao Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten pelas discussões sobre o tema abordado nesse trabalho. Por fim, agradeço o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) pelo fomento à pesquisa realizada ao longo da Graduação no Curso de Bacharelado em Física da Universidade Federal de Pelotas.





## RESUMO

MOSSMANN, Eduardo Henrique. **A mecânica newtoniana modificada como alternativa à matéria escura**. Orientador: Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter. 2021. 52 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Bacharelado em Física) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2021.

A matéria escura é um componente bastante enigmático da Física e atrai a atenção de muitas mentes curiosas. A comunidade científica divide seus esforços em duas partes. A primeira busca evidências da matéria escura e a outra busca teorias alternativas para a gravidade, de forma que tal componente não seja necessária. Este trabalho tem como objetivo estudar uma das hipóteses, de nome dinâmica newtoniana modificada (MOND), que sugere alterações nas equações de Newton no âmbito de galáxias e aglomerados de forma que não seja necessário o uso da matéria escura como explicação para o que é observado. Para tal, é feita uma revisão do tema, constituída de uma revisão histórica sobre a matéria escura e uma apresentação da MOND, abordando sua ideia central, problemas associados e alternativas à ela. Por fim, foi feito o estudo da aplicação desta hipótese em dois conjuntos de escalas de tamanho diferentes entre si: a Via Láctea e o aglomerado de Coma. O objetivo específico do estudo dessas aplicações foi verificar se a mecânica newtoniana modificada nos retornaria valores mais baixos para a variável de interesse chamada razão massa-luz. Valores menores para tal variável indicariam que a mecânica newtoniana modificada prevê uma quantidade muito menor de matéria nos sistemas. Isso, por sua vez, indicaria que a matéria escura não existe nesses locais. Os resultados obtidos para a aplicação no âmbito de galáxias foram inconclusivos, uma vez que as propostas citadas ainda devem ser testadas. Contudo, foram evidenciados os desafios enfrentados nessa área de pesquisa. Já na aplicação no aglomerado de Coma, foram obtidos valores muito menores para a razão massa-luz, o que significa que, se utilizada a mecânica newtoniana modificada, a matéria escura não seria necessária para explicar o comportamento do sistema. Porém a análise feita foi bastante simples e isso certamente é motivo de discussão quando se trata de precisão dos resultados. Disso é possível concluir que a mecânica newtoniana modificada retorna valores menores para a razão massa-luz quando comparados com os resultados provenientes da mecânica clássica. O significado real dessa divergência ainda é incerto, uma vez que os valores aqui obtidos podem ser questionados. Assim, pode-se dizer que, por mais que as incertezas trazidas por essa hipótese não tenham sido solucionadas, a mecânica newtoniana modificada se mostrou uma interessante alternativa para o problema da matéria escura.

Palavras-chave: Matéria Escura. Dinâmica Newtoniana Modificada.



## ABSTRACT

MOSSMANN, Eduardo Henrique. **The modified newtonian dynamics as a alternative to dark matter**. Advisor: Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter. 2021. 52 p. Monography (Bachelor in Physics) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2021.

Dark matter is a quite enigmatic component of Physics and gets the attention of many curious minds. The scientific community divides its efforts into two groups. The first one searches for evidences of dark matter and the second one searches alternative theories of gravity, so that said component is not needed. The objective of the present work is to study one of the hypothesis, named modified newtonian dynamics (MOND), which suggests modifications on Newton's equations in the context of galaxies and galaxy clusters so that such component is not necessary to explain what is observed. In order to do that, a study of the subject is carried out, consisting of a historical review of dark matter and the enunciation of the main idea of MOND, the problems associated with it and its alternatives. Finally, a study of the application of this hypothesis in two sets of scales of different sizes was made: the Milky Way and the Coma cluster. The specific objective of the study of these applications was to verify if the modified Newtonian dynamics would return lower values of the variable of interest called mass-to-light-ratio, where smaller values of such variable would indicate that MOND predicts a much smaller amount of matter in said systems. That, in turn, would indicate that dark matter does not exist in those locations. The results derived in the context of galaxies were inconclusive, since the author's propositions must yet be tested. However, it has become clear this subject raises challenges of research. On the other hand, the results derived from galaxy clusters show much smaller values of the mass-to-light-ratio, which means that, if MOND is used, dark matter would not be needed to explain the behavior of such system. It must be stressed that the analysis made by the authors was quite simple and this is, certainly, a reason to further discuss the precisions of said results. From this, it is noticed MOND returns smaller values of the mass-to-light-ratio, when compared to the results obtained by classical mechanics. The real meaning of such divergence is still unknown, since the values here obtained may be questioned. Yet, one may say that, even though the uncertainties raised by this hypothesis have not been solved, MOND has proven itself to be an interesting alternative to the problem of dark matter.

Keywords: Dark Matter. Modified Newtonian Dynamics.



## LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 2.1 – Velocidades previstas e observadas de uma galáxia em função do raio medido à partir do centro de massa. As linhas contínuas representam os valores teóricos e os pontos com barras de erro os valores observados de velocidade. . . . .</p>	24
<p>Figura 3.1 – Comportamentos das funções de interpolação para diferentes propostas da literatura. A linha azul é a proposta de Scarpa, a linha amarela é a proposta de Famaey e Binney, a linha verde é a proposta de Fabris e Velten e a linha vermelha é a proposta de Zhao e Famaey . . . . .</p>	29
<p>Figura 3.2 – Comportamento universal de galáxias com diferentes luminosidades superficiais.</p>	30
<p>Figura 3.3 – Gráficos comparando o excesso de matéria em aglomerados, segundo resultados da mecânica newtoniana (à esquerda) e da mecânica newtoniana modificada (à direita). No eixo-x temos a massa total observável (gás e estrelas) e no eixo-y temos a massa necessária para descrever a dinâmica dos aglomerados. A linha sólida diagonal representa o equilíbrio entre ambos os valores, onde o excesso de matéria não ocorre. . . . .</p>	33
<p>Figura 4.1 – Gráfico de comparação entre os dados observacionais da galáxia NGC 3198, dados pelas barras de erro, e os modelos <i>I</i> e <i>II</i> (linha traçada e traçada-pontilhada, respectivamente) de acordo com os valores dados de <math>a_0</math>. A linha contínua se refere a outra função de interpolação que discutiremos mais tarde. No eixo x temos a distância a partir do centro e massa da galáxia e no eixo y a velocidade de rotação observada. . . . .</p>	37
<p>Figura 4.2 – Ilustração do efeito de projeção da luminosidade emitida por um corpo de raio <math>R</math> observada no ponto <math>r</math> por um observador a uma distância <math>z</math>. . . . .</p>	43
<p>Figura 4.3 – Perfil do brilho superficial <math>I(r)</math> do aglomerado de Coma. . . . .</p>	44
<p>Figura 4.4 – Perfil da dispersão de velocidades <math>\sigma</math> do aglomerado de Coma. . . . .</p>	44



## LISTA DE TABELAS

- Tabela 4.1 – Tabela comparativa dos modelos tratados ao longo do texto. Para as colunas, temos a função de interpolação  $\mu(x)$  utilizada, o valor do parâmetro de corte  $a_0$  em múltiplos de  $10^{-8} \text{ cm.s}^{-2}$ , a razão massa-luz que os autores chamam de  $\Upsilon_L$  empregada pelo modelo, a velocidade de rotação  $v_c(R_0)$  dada em  $\text{km.s}^{-1}$  medida no raio galactocêntrico  $R_0$  e a velocidade de rotação  $v_\infty$  na borda da Via Láctea dada nas mesmas unidades de  $v_c$ . . . . . 38
- Tabela 4.2 – Tabela comparativa dos valores para a razão massa-luz  $\Upsilon$  obtida dada em múltiplos de  $M_\odot/L_\odot$  de acordo com o raio crítico  $r_C$  dado em múltiplos de  $Mpc$  que depende do parâmetro de corte  $a_0$  referentes ao aglomerado de Coma. . . . . 45





## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>O PROBLEMA DA MATÉRIA ESCURA</b>	<b>19</b>
2.1	Uma visão geral da matéria escura	19
2.2	Revisão histórica	21
<b>3</b>	<b>A MECÂNICA NEWTONIANA MODIFICADA</b>	<b>27</b>
<b>3.1</b>	<b>As ideias básicas da hipótese de Milgrom</b>	<b>27</b>
3.1.1	Algumas previsões da mecânica newtoniana modificada	29
<b>3.2</b>	<b>Sobre os problemas e alternativas da mecânica newtoniana modificada</b>	<b>32</b>
3.2.1	Os principais contrastes	32
3.2.2	As alternativas mais conhecidas	33
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO DA MECÂNICA NEWTONIANA MODIFICADA</b>	<b>35</b>
4.1	A mecânica newtoniana modificada no âmbito de galáxias	35
4.2	A mecânica newtoniana modificada no âmbito de aglomerados	39
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>49</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Desde de (ZWICKY, 1933), quando o conceito de matéria escura foi proposto de forma mais robusta para a comunidade científica, o interesse nessa área aumentou muito, sejam pelas dúvidas do público leigo ou pela curiosidade acadêmica. O ser humano tem investido uma enorme quantidade de tempo na tentativa de descobrir o que seria essa matéria incomum que se espalha pelo Universo, altera a dinâmica de sistemas e se dá ao luxo de permanecer indetectável. Além disso, outra parcela da Ciência investe seus esforços propondo modelos que expliquem as anomalias observadas nos âmbitos de galáxias e aglomerados de forma que a matéria escura não seja necessária (BERTONE; HOOPER, 2018).

Nosso objetivo nesse Trabalho de Conclusão de Curso será compreender a origem e transformação do conceito de matéria escura e, mais especificamente, estudar um dos modelos propostos que descartam a existência dessa. Esse modelo, chamado de mecânica newtoniana modificada proposto por (MILGROM, 1983a) propõe que talvez não compreendamos completamente a gravidade em todas as escalas de comprimento, o que explicaria o motivo pelo qual observamos alguns eventos que não são previstos pela mecânica newtoniana.

Para tal, estudaremos esse modelo em dois momentos. No primeiro, apresentaremos as ideias básicas da hipótese de Milgrom, as exigências que devem ser cumpridas de acordo com o autor e algumas previsões confirmadas pela literatura. Ainda no primeiro momento, enunciaremos os principais problemas da abordagem de Milgrom bem como as mais conhecidas alternativas propostas para contornarmos esses problemas. No segundo momento aplicaremos a mecânica newtoniana modificada e seu ferramental matemático na Via Láctea, seguindo as ideias de (FAMAHEY; BINNEY, 2005) e no aglomerado de Coma, de acordo com (FABRIS; VELTEN, 2009).

Para realizarmos essa aplicação, vamos utilizar a hipótese de Milgrom para reescrever algumas equações da mecânica newtoniana, obter um potencial gravitacional generalizado (VELTEN, 2011) e utilizar o teorema do virial (MARION; THORNTON, 2004) para calcularmos a energia cinética dos sistemas a partir desse potencial. Na sequência, vamos associar essa energia cinética com uma variável de interesse que pode ser obtida a partir de dados observacionais. Ou seja, iremos utilizar a ideia de Milgrom para alterar a mecânica newtoniana e obter a variável de interesse a partir da análises de dados obtidos pela Astronomia.

Com isso, seremos capazes de compreender o funcionamento da mecânica newtoniana modificada em dois sistemas completamente distintos e com escalas de comprimento muito diferentes. Além disso, poderemos analisar os resultados obtidos e refletir sobre eles. Na aplicação dessa nova mecânica no aglomerado de Coma, vamos comparar os resultados com os de (ZWICKY, 1933) para que possamos discutir a existência da matéria escura nesse sistema.

Quanto aos resultados mencionados, a variável de interesse será a chamada razão massa-luz, que nos informa a quantidade de matéria existente em sistemas estelares de acordo com a luminosidade observada (NETO, 2000). Com o estudo que será apresentado aqui, poderemos calcular essa razão para os sistemas analisados, com foco no aglomerado de Coma, e verificar se essa variável tem seu valor reduzido. Se isso ocorrer, poderemos interpretar (com a cautela

imposta sobre nós pelo método científico) que a matéria escura não seria necessária para descrever a dinâmica dos sistemas em questão.

## 2 O PROBLEMA DA MATÉRIA ESCURA

Neste capítulo introdutório, será apresentada uma visão geral do problema da matéria escura. Na seção 2.1 iremos apresentar as principais áreas da Física que pesquisam esse conceito bem como as dificuldades enfrentadas por essas áreas. Já na seção 2.2, vamos discutir os desdobramentos históricos mais importantes para este problema a fim de compreendermos os motivos pelos quais a mecânica newtoniana modificada foi proposta por Mordehai Milgrom nos anos 80.

### 2.1 Uma visão geral da matéria escura

A matéria escura é um tema de grande interesse teórico e experimental na Física atual, tanto na Cosmologia quanto na Astrofísica e Física de Partículas, uma vez que sua proposição e evidências questionaram fortemente as teorias já estabelecidas (MEESSEN, 2017). As buscas por sua natureza em grandes e pequenas escalas são várias, fazendo com que diversas áreas se juntem em um esforço multidisciplinar a fim de se determinar suas origens e composição (BOVEIA; DOGLIONI, 2018). Pesquisas atuais em grandes escalas mostram que a matéria que conhecemos (matéria **bariônica**) compõe por volta de míseros 5% de todo o Universo, onde os outros 95% se dividem em matéria escura e energia escura, com 25% e 70%, respectivamente (ANGELIS; PIMENTA, 2015). Aqui vale apresentar uma diferença importante entre matéria e energia escura. A primeira atua de forma a afetar o movimento dos corpos via gravidade (PERKINS, 2009), enquanto a segunda faz com que o Universo se expanda exercendo uma espécie de pressão negativa (FRENK; WHITE, 2012). Por outro lado, em escalas microscópicas, as informações que temos até o momento apontam para o fato de que qualquer partícula considerada uma candidata a compôr a matéria escura não será encontrada no Modelo Padrão da Física de Partículas (BUCHMUELLER; DOGLIONI; WANG, 2017), por razões que serão explicadas mais adiante.

Analisando mais profundamente as pesquisas em grandes escalas, é possível perceber que todas as informações sobre a matéria escura têm origem gravitacional (ANGELIS; PIMENTA, 2015). A suposta presença desse tipo de matéria afeta o campo gravitacional de grandes corpos, como galáxias e aglomerados, de forma que as velocidades de giro em torno dos seus centros de massa sejam muito maiores do que as previstas pela mecânica newtoniana (PERKINS, 2009). Essas discrepâncias são observadas em diversas galáxias, até mesmo na nossa própria Via Láctea, e em vários outros pontos do Universo, como no aglomerado de Coma (BERTONE; HOOPER, 2018). Observações diretas, como as diferenças de velocidade, e indiretas, fazendo o uso de lentes gravitacionais, apontam para um grande problema do ponto de vista macroscópico: até hoje não se conseguiu obter outros tipos de informações sobre a matéria escura, que não fossem diretamente relacionadas com suas características gravitacionais (FENG, 2010). Ou seja, as pesquisas realizadas em grandes escalas – como a Astrofísica e a Cosmologia – não fornecem informações mais detalhadas sobre a natureza da matéria escura, por isso, as atenções se voltam para a Física de Partículas.

Já nas pequenas escalas há intensas discussões sobre o tema (BAUER; PLEHN, 2019). As hipóteses se concentram em encontrar candidatos que vão além do Modelo Padrão. Para

isso, se faz necessária uma nova física, capaz de prever tais candidatos e encontrá-los utilizando colisores de partículas poderosos o bastante. Dos candidatos teóricos encontrados na literatura, as partículas massivas fracamente interagentes são colocadas em destaque. Estas devem ser pesadas o bastante para contabilizarem a quantidade de matéria escura calculada no Universo, além de interagirem entre si através de uma força muito fraca, motivo pelo qual não podemos detectá-las diretamente (PERKINS, 2009). Para estudar as propriedades da matéria escura a nível de partículas, se faz uso de colisores como o Grande Colisor de Hádrons (LHC, do inglês *Large Hadron Collider*), onde se estuda a produção de tais candidatos a partir da colisão de partículas presentes no Modelo Padrão e aferindo se há ou não a conservação de *quadrimentum* (ANGELIS; PIMENTA, 2015)). Caso a conservação seja violada, a colisão que gerou tal evento é estudada e dali se tiram informações sobre as partículas que foram produzidas pela colisão. Este processo se chama reconstrução do momento transverso<sup>1</sup> (BERGSTRÖM; GOOBAR, 2004). O LHC, que deve retomar seu funcionamento em um futuro próximo com a capacidade de fornecer ainda mais energia para as partículas, ainda não gerou um evento que nos forneça as informações necessárias para colocarmos um fim ao mistério da matéria escura (FENG, 2010). Mas se esperam resultados promissores no próximo funcionamento, já que o nível energético será muito maior, o que possibilita a produção de novas informações e, talvez, os candidatos tão esperados.

Do ponto de vista teórico, o Modelo Padrão da Física de Partículas é uma ótima ferramenta para descrevermos a matéria e suas interações em seu nível mais fundamental. Este modelo abrange duas das três interações fundamentais: eletrofraca e nuclear forte (BERTONE; HOOPER; SILK, 2005). Devido a ausência de uma descrição completa da gravidade do ponto de vista da Física de Partículas (PERKINS, 2009), a tarefa de descrever a matéria escura segundo este modelo torna-se bastante complicada, uma vez que as informações sobre a mesma têm origem gravitacional. Logo, outra abordagem se faz necessária para obtermos uma descrição quântica da matéria escura, o que nos indica que teorias além do Modelo Padrão são necessárias (PROFUMO; GIANI; PIATTELLA, 2019).

Existem outros motivos para procurarmos informações além deste modelo. A primeira razão é que algumas partículas descritas pelo Modelo Padrão são instáveis, a ponto de terem uma meia-vida menor do que a idade do Universo, o que significa que essas partículas decaem e mudam suas características rápido demais para se manterem constantes desde o Big Bang (FRENK; WHITE, 2012). A segunda razão é que a matéria que conhecemos interage com a luz, o que contraria as observações da matéria escura até então, já que, se esta realizasse tais interações, teria sido observada muito antes (PERKINS, 2009). A terceira razão é que a matéria escura parece não ter qualquer característica eletromagnética, o que elimina a possibilidade desta ser constituída por partículas com carga elétrica (ANGELIS; PIMENTA, 2015). Existem outras razões para procurarmos por explicações além do Modelo Padrão, mas por ora, estas são suficientes para evidenciar tal necessidade.

Colocando em perspectiva os problemas em grandes e pequenas escalas, surge uma per-

---

<sup>1</sup> Uma tradução livre do inglês *missing transverse momentum reconstruction*.

gunta óbvia: a matéria escura de fato existe? A visão do físico israelense Mordehai Milgrom sugere que não (MILGROM, 1983a). Sua proposição chamada **Mecânica newtoniana modificada** (MOND, do inglês *Modified Newtonian Dynamics*), promete ser uma descrição alternativa da gravidade, onde não há necessidade de invocarmos o conceito de matéria escura para explicarmos as anomalias – como as velocidades de galáxias observadas experimentalmente. Para isso, são feitas duas sugestões: altera-se a forma da segunda lei de Newton, e mantêm-se a equação da força gravitacional como a conhecemos, ou faz-se o oposto. As duas sugestões denominam-se **inércia modificada** e **gravidade modificada**, respectivamente (SCARPA, 2006). Para que estas abordagens sejam válidas, quaisquer equações provenientes desta mecânica modificada devem recair sobre as equações da dinâmica já conhecidas, obedecendo um princípio de correspondência análogo ao da Mecânica Quântica com a Clássica (MILGROM, 2020). Deste modo, é inserido um parâmetro de corte, de forma que a aceleração do sistema dite qual mecânica deve ser utilizada. Quando esta for maior que o parâmetro de corte, a Mecânica Clássica entra em cena, caso contrário, se utiliza a mecânica modificada como teoria vigente (MILGROM, 1983b).

## 2.2 Revisão histórica

Para realizarmos esta revisão histórica, iremos nos basear fortemente no artigo de Bertone e Hooper (2018). Compreender os eventos que levaram a comunidade científica a conceber o conceito de matéria escura irá facilitar muito o entendimento das teorias alternativas propostas e de seus objetivos, que discutiremos no capítulo 3.

Do contrário do que geralmente se apresenta ao público, os primeiros relatos de discussões sobre a existência da matéria escura precedem os trabalhos de Zwicky (1933). O filósofo grego Epicurus, por volta de 250 a.C, já havia sugerido a possível existência de um tipo invisível de matéria. Séculos depois (1600, aproximadamente), após o já estabelecido domínio do pensamento aristotélico sobre o Universo estático e imutável, Galileo realizou as famosas observações em seu telescópio. Nas quais, comprovou a existências das luas de Júpiter e das estrelas que compõem nossa galáxia foram marcos na história da Ciência como a conhecemos hoje. Ironicamente, estas observações se relacionavam com as proposições de Epicurus, mesmo que não diretamente. Ao mostrar para o mundo suas descobertas, Galileo evidenciou algo muito importante: com o advento de novas tecnologias, podemos ver o Universo com outros olhos.

Em 1687, com a publicação do *Principia* (para uma leitura acessível, veja (LINSKY; IRVINE, 2019)), Isaac Newton mostrou ao mundo que a matemática pode servir como ferramenta para modelarmos o comportamento de objetos. Junto disso, surge a ideia da gravitação universal que rege todo o Universo em todas as escalas de tamanho. Fazendo uso desta ferramenta revolucionária, os físicos se viram capazes de modelar o comportamento de planetas e outros corpos celestes. Este fato levou a humanidade a um novo nível de compreensão do mundo que nos cerca, fazendo com que diversos avanços tecnológicos surgissem nas décadas seguintes.

Fazendo uso desta ideia, Michell (1784) propôs que a própria luz deve ser afetada pela gravidade, já que esta força tem caráter universal (MICHELL, 1784). Com este raciocínio, Michell

chegou a conclusão que deveriam existir objetos tão massivos a ponto da gravidade gerada por eles afetar a luz e absorvê-la em seu todo. Separadamente, Laplace discutia a mesma ideia fazendo uso dos mesmos argumentos. Estas proposições são o primeiro registro da contemplação da existência do que conhecemos hoje como buracos negros.

Já no século 19, a comunidade astronômica se perguntava o porquê da assimetria na distribuição das estrelas no céu noturno, fazendo com que certas regiões ficassem completamente escuras (no sentido de falta de luminosidade estelar). Para explicar tal observação, os físicos da época pensaram em duas soluções: a falta de luminosidade se dava por conta da escassez de estrelas naquela região ou deveria haver um tipo de nuvem de matéria, que iria absorver a luminosidade emitida por estrelas próximas. Este debate perdurou por anos e, assim, foi decidido que uma análise experimental deveria pôr um fim no problema.

Para isso ser possível, surgiu a necessidade de um modelo teórico que fosse capaz de prever os resultados a serem observados. Então Lord Kelvin, no início do século 20, propôs uma abordagem para tal (uma versão recente com o texto atualizado pode ser encontrada em (KELVIN, 1904)). Se cogitarmos um modelo cujo comportamento é baseado na teoria dos gases, e aplicarmos tal comportamento para as estrelas da Via Láctea, podemos obter uma relação entre o tamanho e a velocidade desse gás de estrelas. Esta abordagem pode parecer um tanto estranha, já que trata as estrelas como partículas que compõem um gigantesco gás. Porém, se olharmos com mais cautela, veremos que este método pode ser útil, uma vez que a descrição de cada estrela sob a influência gravitacional de outras tantas se torna inviável.

A abordagem proposta por Kelvin é feita da seguinte forma: tratemos as estrelas não como corpos únicos, mas como uma densidade de matéria presente em uma distribuição esférica com um dado raio. Esta densidade pode ou não ser uniformemente distribuída e o raio dado é da ordem de grandeza do raio da Via Láctea, obviamente. Com informações sobre o número de estrelas, algo como  $10^9$ , e um raio de aproximadamente  $3,09 \times 10^{16}$  km (sugestões estas feitas por Hubble em anos anteriores), Lord Kelvin chegou a conclusão de que, muito provavelmente, a matéria escura é simplesmente formada por estrelas comuns, cujo brilho não chegou até nós devido à distância. Além disso, Kelvin obteve um valor máximo para a densidade de matéria presente, alegando que densidades maiores fariam com que as velocidades fossem altas o bastante para que as estrelas saíssem pela tangente de sua trajetória atual – o que não é observado.

Alguns anos mais tarde, o astrônomo Kapteyn (1922) propôs um modelo parecido com o de Kelvin, tratando a galáxia como uma distribuição gasosa de estrelas em um plano. Com o Sol no centro do plano e a nuvem de estrelas girando em torno deste, Jacobus definiu um termo chamado **massa estelar efetiva** como uma razão entre a massa gravitacional medida e o número total observado de estrelas. A massa gravitacional é a massa necessária para manter o sistema em sua configuração atual, ou seja, o valor de massa necessário para que a força gravitacional correspondente seja forte o bastante para impedir um aumento considerável de velocidade das estrelas. Já o número total de estrelas observadas, é resultado de uma função de luminosidade que retorna o número esperado de estrelas para produzir o brilho observado na galáxia. Vale notar que o conceito de massa estelar efetiva foi predecessor de um conceito que seria muito utilizado anos mais



tarde por Zwicky (1933), a razão massa-luz.

Em suas análises no ano de 1932, o discípulo de Jacobus, Oort obteve valores aproximados de concentração de matéria em torno do Sol, fazendo uso do modelo proposto anteriormente (OORT, 1932). Com valores estimados de massa gravitacional e número de estrelas em mãos, o resultado obtido foi uma densidade de matéria de  $0,099M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$ , onde o símbolo  $M_{\odot}$  indica a massa solar (aproximadamente  $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ ) e o parsec ( $pc$ ) equivale a  $30,857 \times 10^{12} \text{ km}$ . Assim, foi mostrado que a concentração de matéria próxima ao Sol é baixa, o que implicaria que a matéria escura seria encontrada em valores ainda menores.

Neste ponto, realizar uma revisão do que aconteceu até os anos 30 é válido, uma vez que nos anos seguintes, o astrônomo Fritz Zwicky iria balançar a Ciência com suas observações do aglomerado de Coma. Até o momento, não se tinha a certeza da existência da matéria escura. E mesmo se esta existisse, sua abundância e composição eram desconhecidas. Do ponto de vista experimental, haviam especulações como aquelas feitas pela comunidade astronômica no século 19. Enquanto isso, as hipóteses da época também nos forneciam poucas informações sobre o tema, sendo todas estas obtidas de forma indireta através de aproximações.

Em 1933, Zwicky observava o comportamento de galáxias do aglomerado de Coma. Os dados astronômicos da época alegavam que o aglomerado era composto por 800 galáxias, cuja velocidade observada era de  $1000 \text{ km.s}^{-1}$ . Para estudar esta estrutura, Zwicky fez uso do teorema do virial (esse teorema é discutido em (NETO, 2000)) para obter um valor aproximado para a massa do aglomerado. Este teorema é dado por

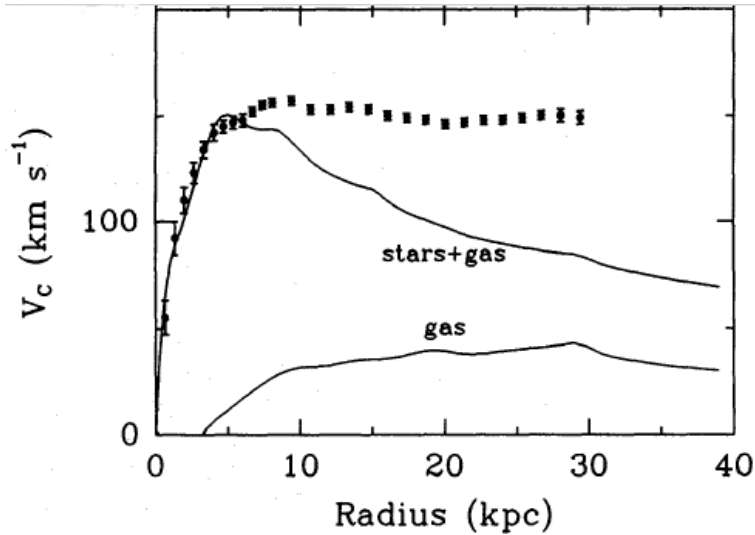
$$\bar{K} = -\frac{1}{2}\bar{V}, \quad (2.1)$$

onde  $\bar{K}$  e  $\bar{V}$  indicam as energias cinética e potencial médias por unidade de massa do sistema, supondo que o mesmo está em equilíbrio mecânico. Este teorema é muito útil para a Astronomia, pois auxilia na obtenção de dados como a velocidade esperada e a massa total do aglomerado.

Utilizando o número de galáxias estipulado anteriormente e a massa média de uma galáxia no valor de  $10^9 M_{\odot}$ , respectivamente, podemos obter o valor da massa total do aglomerado. Este valor é aproximadamente  $1,6 \times 10^{45} \text{ g}$ , o que resulta em  $\bar{V} = -64 \times 10^{12} \text{ cm}^2.\text{s}^{-2}$ . Disto, vemos que a velocidade de dispersão esperada seria de  $80 \text{ km.s}^{-1}$ , o que não corresponde com o valor observado. A figura 2.1 apresenta uma comparação para os **valores esperados** para as velocidades de gases e estrelas presentes em uma galáxia comum com os **valores observados**. Nesta, podemos ver claramente que, após certo valor de  $r$ , a mecânica newtoniana falha em descrever o comportamentos da galáxia.

Outra suposição feita por Zwicky foi que talvez o aglomerado não estivesse em equilíbrio mecânico, o que levou a resultados que também não foram observados. Ou seja, a quantidade de matéria presente no aglomerado não seria grande o bastante para que a força gravitacional correspondente impedisse a dispersão do aglomerado e seu eventual desaparecimento, independente do estado mecânico do mesmo. Estes resultados mostraram anomalias consideráveis no comportamento de galáxias e, embora o uso do termo matéria escura neste artigo não tenha sido o primeiro da história, esse finalmente ganhou uma postura mais robusta no meio acadêmico.

Figura 2.1 – Velocidades previstas e observadas de uma galáxia em função do raio medido à partir do centro de massa. As linhas contínuas representam os valores teóricos e os pontos com barras de erro os valores observados de velocidade.



Fonte: (BEGEMAN, 1989).

Quatro anos mais tarde, Zwicky (1937) publicou um novo artigo revisitando o problema. Neste, o autor propõe métodos distintos para medir as características principais do aglomerado de Coma. Em particular, utilizando novamente o teorema do virial, mas desta vez assumindo que haviam 1000 galáxias distribuídas uniformemente em uma esfera cujo raio seria de  $2 \times 10^6$  anos-luz, ele utilizou a velocidade observada de  $700 \text{ km.s}^{-1}$  para determinar a massa média de cada galáxia. Ou seja, Zwicky redefiniu dois parâmetros, pois foram atualizados pela comunidade astronômica, para calcular outro parâmetro a partir das observações. Dadas estas mudanças, o valor mínimo calculado para a massa do aglomerado foi de  $4,5 \times 10^{13} M_{\odot}$ , o que implica em uma massa média de  $4,5 \times 10^{10} M_{\odot}$  por galáxia.

A razão massa-luz  $\Upsilon$  foi utilizada neste artigo de 1937, sendo sucessora do conceito de massa estelar efetiva utilizada por Jacobus anos antes. Cada termo da razão é dado em múltiplos do valor equivalente retirado do nosso Sol, de forma que<sup>2</sup>

$$\Upsilon = \frac{M}{L}, \quad (2.2)$$

onde  $M$  é a massa do sistema, dada em  $Kg$  e  $L$  é a luminosidade observada em  $W$ , sendo que a luz emitida por corpos em geral é obtida por observações e modelos matemáticos.

Utilizando a massa calculada e a luminosidade correspondente do aglomerado, Zwicky mostrou que a razão massa-luz era de aproximadamente 500, o que é muito acima do observado para aglomerados e galáxias comuns (SCARPA, 2006). Este resultado indicou que havia muito mais massa do que a observada, levando o autor a concluir que era preciso conhecer a quantidade

<sup>2</sup> A luminosidade solar é  $L_{\odot} = 3,828 \times 10^{26} \text{ W}$ .

de matéria escura no aglomerado para que pudéssemos afirmar com precisão sua massa total verdadeira.

Dadas essas conclusões, as objeções vindas da comunidade científica não foram uma surpresa. Apenas três anos mais tarde, o astrônomo sueco Erik Holmberg expressou suas dúvidas quanto às conclusões de Fritz Zwicky nos anos anteriores alegando que o conceito de matéria escura leva a suposições um tanto incomuns (HOLMBERG, 1940). Para Holmberg, as altas velocidades observadas no aglomerado de Coma indicariam que alguns corpos não eram membros permanentes do aglomerado. Ou seja, os corpos cuja energia cinética observada era muito elevada não faziam parte do aglomerado, mas sim foram pegos pelo campo gravitacional de Coma de forma temporária, indicando que tais objetos iriam se desprender do aglomerado eventualmente, dada sua alta velocidade.

Já na década de 1950, o astrofísico armênio Viktor Ambartsumian levantou a hipótese de que talvez os aglomerados fossem sistemas instáveis e de rápida expansão (AMBARTSUMIAN, 1958), o que impede que utilizemos o teorema do virial como feito por Zwicky. Essas incertezas prosseguiram ao ponto que, em 1961, fosse realizada uma conferência sobre a instabilidade de sistemas de galáxias a fim de se discutir o problema. Naquela ocasião, diversas hipóteses foram discutidas e o único consenso alcançado foi de que era preciso compreender melhor os aglomerados antes que fossem feitas conclusões sobre a existência ou não da matéria escura.

Nos anos seguintes, os astrônomos Rubin e Ford (1970) utilizaram um aparato chamado espectrógrafo de tubo de imagem que foi anexado aos telescópios da época. Este equipamento permitia que os telescópios fossem capazes de analisar galáxias que se encontravam a uma distância muito maior do que as observadas até então com o benefício de permitir observações de corpos muito menos luminosos. Com isso, Rubin e Ford constataram que, nos braços mais externos da galáxia de Andrômeda (esta também é chamada de M31), as estrelas possuíam velocidades de rotação que fariam com que as mesmas fossem ejetadas do sistema - fato este que não é observado. Aqui, então, temos outra observação compatível com as que Fritz Zwicky realizou cerca de quatro décadas atrás. Para Rubin, a explicação mais plausível para tal fenômeno foi que Andrômeda possuía muito mais massa do que a observada (novamente, a conclusão atingida foi a mesma de Zwicky).

Ao longo da década de 1970, artigos como (S.ROBERTS; H.ROTS, 1973), (EINASTO; KAA-SIK; SAAR, 1974) e (OSTRIKER; PEEBLES; A.YAHIL, 1974) mostraram a existência de fenômenos muito parecidos com os observados por Zwicky, Rubin e Ford, fazendo com que o problema ganhasse ainda mais destaque na academia científica. A grande maioria dos autores de tais artigos utilizou a tecnologia dos radares militares desenvolvida durante a Segunda Guerra Mundial como um primeiro passo para as observações astronômicas via ondas de rádio, área esta que iria ser de grande importância para outros problemas de interesse.

Como visto até aqui, o conceito de matéria escura mudou consideravelmente ao longo do tempo, bem como as evidências para corroborar (ou questionar) a veracidade deste. Começando com Epicurus, na Grécia Antiga, onde este conceito era somente uma abstração, passamos pelo questionamento sobre a assimetria do céu noturno no século 19. A estrutura da suposta nuvem de matéria que causava tal fenômeno ainda era bastante generalista, podendo ser formada por

basicamente tudo que conhecíamos na época. Na sequência, Fritz Zwicky apresentou a primeira evidência experimental enfatizando que a quantidade adicional de matéria deveria ser composta por algo que não havíamos considerado até então, fato este que foi fortalecido por Rubin e Ford quatro décadas mais tarde. E, como dito anteriormente, na década de 1980, o físico israelense Mordehai Milgrom propôs sua hipótese da mecânica newtoniana modificada como uma alternativa à matéria escura, que é nosso problema de interesse neste Trabalho de Conclusão de Curso.

### 3 A MECÂNICA NEWTONIANA MODIFICADA

Neste capítulo vamos apresentar a mecânica newtoniana modificada. Para isso, vamos discutir as ideias centrais da hipótese de Milgrom na Seção 3.1, apresentando as principais equações e algumas previsões interessantes. E na Seção 3.2 vamos mostrar seus principais problemas e discutir brevemente três alternativas propostas pela academia científica para tornar a mecânica newtoniana modificada uma teoria mais robusta e fundamentada.

#### 3.1 As ideias básicas da hipótese de Milgrom

Em 1983 o físico israelense Mordehai Milgrom publicou três artigos propondo uma alternativa para o problema da matéria escura (MILGROM, 1983c), (MILGROM, 1983b) e (MILGROM, 1983a). Chamado de **hipótese da massa escondida**<sup>1</sup>, este problema já havia sido observado pela comunidade astronômica, em especial por Fritz Zwicky, como vimos no capítulo anterior, gerando um breve consenso a respeito da existência da matéria escura. Contudo, Milgrom se mostrou pouco favorável a esta ideia, visto que a existência deste novo tipo de matéria acarretava em uma série de suposições sobre sua composição e abundância.

Em seu primeiro artigo, ele discute a dificuldade imposta quando se considera a existência da matéria escura, mostrando que um número ainda maior de suposições sobre a mesma é necessário para se encaixar nos dados astronômicos. Milgrom pontuou que a velocidade de galáxias e sistemas de galáxias pode não seguir o comportamento previsto pela equação padrão

$$v^2 = G \frac{M}{r}, \quad (3.1)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa do sistema e  $r$  é da ordem do tamanho do sistema, quando aproximamos a órbita por um círculo. Esta hipótese opera sobre o fato de que tomamos a Equação (3.1) como verdadeira, pois ela descreve corretamente a dinâmica do sistema solar e a de corpos em escala de laboratório. Contudo, quando se trata de sistemas de galáxias ou galáxias individuais, os parâmetros adotados para a descrição do sistema são aproximações baseadas na mecânica newtoniana, o que pode gerar problemas como os observados por Zwicky. Logo, precisamos escolher um dos caminhos possíveis: tomamos como verdade a existência da matéria escura, e fazemos uma série de suposições sobre a mesma, ou desconsideramos sua existência e modificamos a mecânica newtoniana na escala galáctica.

Se escolhermos o segundo caminho, precisamos propôr modificações. Para tal, a primeira suposição sugerida por Milgrom é que a segunda lei de Newton deve ser modificada por uma função de interpolação  $\mu(x)$ , que relaciona a aceleração  $a$  do sistema com o parâmetro de corte  $a_0$ , de tal forma que

$$\vec{F} = m\mu(x)\vec{a}, \quad (3.2)$$

<sup>1</sup> Tradução livre do termo *hidden mass hypothesis*.

sendo que função  $\mu(x)$ , com  $x = a/a_0$ , deve obedecer aos seguintes comportamentos assintóticos:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \gg 1, \\ x, & \text{para } x \ll 1. \end{cases} \quad (3.3)$$

Esta modificação na segunda lei impõe, obviamente, que quando a aceleração  $a$  do sistema é muito maior que um dado valor de corte  $a_0 \approx 1,2 \times 10^{-8} \text{ cm.s}^{-2}$ , a função de interpolação tende a 1, recuperando assim a mecânica newtoniana. Por outro lado, quando a aceleração é menor que  $a_0$ , obtemos uma segunda lei modificada que deve ser utilizada para reger o comportamento do sistema. Além disso, a Equação (3.2) deve obedecer aos mesmos princípios que a sua equivalente newtoniana: a força atua sobre o corpo através da linha que os conecta e a aceleração tem mesmo sentido da força. A última imposição é óbvia, uma vez que recuperamos a segunda lei em um dos limites assintóticos e esta possui tais propriedades. Note que a forma da função de interpolação não foi definida, fazendo com que as pesquisas subsequentes utilizem a forma mais conveniente de  $\mu(x)$ , desde que as exigências da Equação (3.3) sejam cumpridas.

Por outro lado, a segunda abordagem proposta se refere a mudanças na gravitação, onde novamente utilizamos o parâmetro  $a_0$  (SCARPA, 2006). Neste caso, Milgrom propôs que, quando lidamos com sistemas puramente gravitacionais (sistemas onde a única força presente é a gravidade), a aceleração do campo gravitacional deve ser reescrita de forma análoga à Equação (3.2),

$$a_N = a\mu(x). \quad (3.4)$$

Na Equação (3.4), o termo  $a_N$  representa a aceleração newtoniana esperada,  $a$  representa a aceleração real do sistema (levando em consideração as suposições de Milgrom) e, novamente,  $\mu(x)$  é a função de interpolação já mencionada. Nesta modificação, quando  $x \ll 1$ , temos a relação

$$a = (a_N a_0)^{1/2}, \quad (3.5)$$

onde  $a_N = GMr^{-2}$  e, supondo uma órbita circular, teremos

$$a = \frac{(GMa_0)^{1/2}}{r}. \quad (3.6)$$

A dependência em  $1/r$  é consequência direta da Equação (3.5), o termo  $M$  indica a massa que gera a aceleração gravitacional e  $a_0$  age como um fator de correção. Deste modo, cabe à função de interpolação  $\mu(x)$  realizar a conexão entre a mecânica newtoniana e a sua versão modificada, para que os cálculos entre os regimes sejam possíveis.

Quando se trata da função de interpolação, existem diversas formas na literatura, dentre as quais selecionamos as quatro abaixo, respectivamente de (SCARPA, 2006), (FAMAHEY; BINNEY, 2005), (FABRIS; VELTEN, 2009) e (ZHAO; FAMAHEY, 2006). A Figura 3.1 mostra os gráficos das funções de interpolação selecionadas.

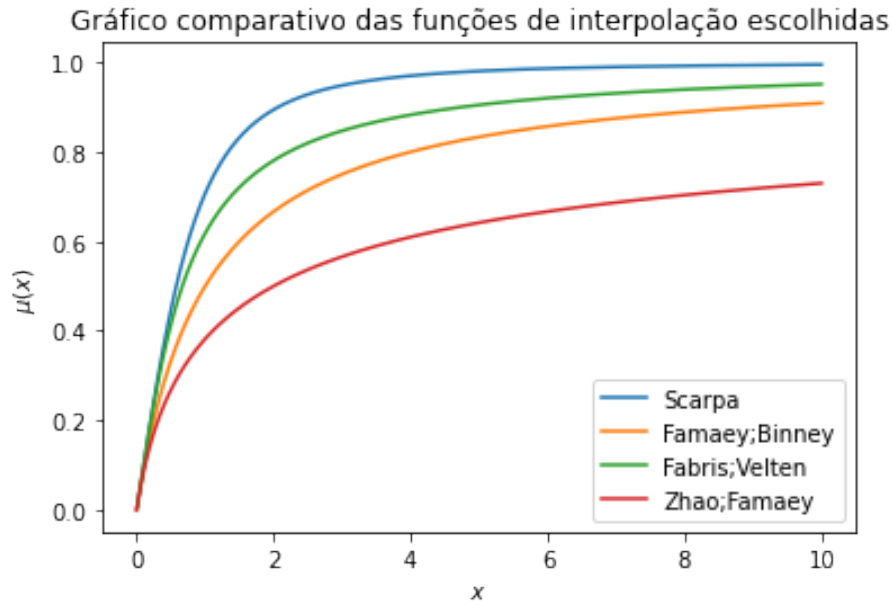
$$\text{Scarpa: } \mu_S(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} \quad (3.7)$$

$$\text{Famaey, Binney: } \mu_{FB}(x) = \frac{x}{1+x} \quad (3.8)$$

$$\text{Fabris, Velten: } \mu_{FV}(x) = \frac{\sqrt{1+4x^2}-1}{2x} \quad (3.9)$$

$$\text{Zhao, Famaey: } \mu_{ZF}(x) = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\sqrt{1+4x}+1} \quad (3.10)$$

Figura 3.1 – Comportamentos das funções de interpolação para diferentes propostas da literatura. A linha azul é a proposta de Scarpa, a linha amarela é a proposta de Famaey e Binney, a linha verde é a proposta de Fabris e Velten e a linha vermelha é a proposta de Zhao e Famaey



Fonte: o autor (2021).

Dada a função de interpolação escolhida, podemos inseri-la na Equação (3.4) e obter a aceleração no limite  $a \ll a_0$ , desde que saibamos a forma de  $a_N$ . No caso da função de interpolação retirada de (SCARPA, 2006), obtemos

$$a = a_N \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{2a_0}{a_N} \right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (3.11)$$

### 3.1.1 Algumas previsões da mecânica newtoniana modificada

Dado o ferramental matemático apresentado, podemos exemplificar como esta nova mecânica prevê algumas relações importantes presentes na Astronomia e Cosmologia. A primeira delas é a relação empírica de Tully-Fisher (TULLY; FISHER, 1977). Esta relação diz que: galáxias mais luminosas têm, em média, maiores velocidades de rotação, o que significa que são mais massivas, e a luminosidade cresce com a velocidade de rotação nessa proporção (quarta potência). Logo,

$$v^4 \propto L. \quad (3.12)$$

A mecânica modificada obtém esta relação de forma trivial. Basta escrevermos o lado direito da Equação (3.6) como  $a = v^2/r$  para obtermos

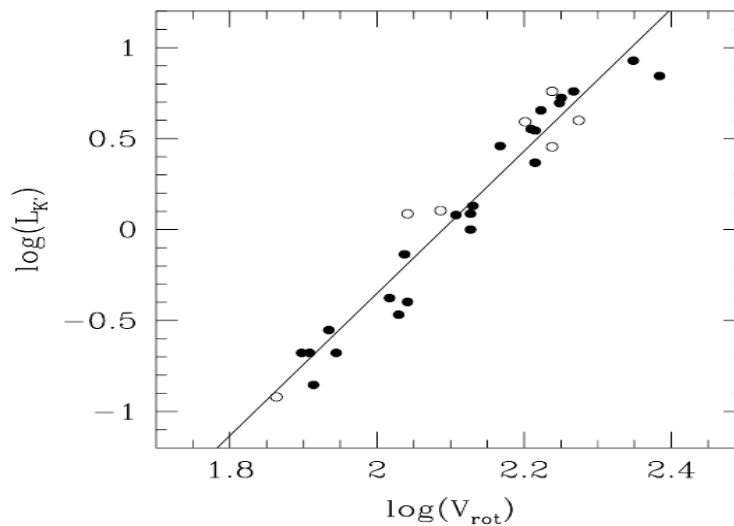
$$v^4 = GMa_0, \quad (3.13)$$

onde multiplicamos e dividimos por  $L$  para obtermos a razão massa-luz  $\Upsilon$  como constante de proporcionalidade. Com isso,

$$v^4 = Ga_0\Upsilon L. \quad (3.14)$$

Esta equação implica que  $\Upsilon$  deve ser constante para que a relação de Tully-Fisher seja explicada. Isso de fato ocorre, pois galáxias espirais possuem um número de estrelas muito parecido, além da luminosidade individual de cada estrela tender sempre ao mesmo valor (BEGEMAN, 1989). Deste raciocínio, retiramos uma conclusão importante: a relação de Tully-Fisher é **universal** (MILGROM, 1983b), o que implica que todas as galáxias devem seguir o mesmo comportamento. Cerca de uma década depois desta previsão, dados astronômicos confirmavam o que Milgrom havia previsto com sua mecânica newtoniana modificada. A Figura 3.2 mostra que galáxias com altas e baixas luminosidades superficiais seguem o mesmo comportamento, onde a inclinação da reta é exatamente igual a 4, o mesmo expoente da velocidade na Equação (3.13).

Figura 3.2 – Comportamento universal de galáxias com diferentes luminosidades superficiais.



Fonte: (SANDERS; VERHEIJEN, 1998).

De forma simplificada, os pontos acima da reta representam galáxias com baixa luminosidade superficial, enquanto os pontos abaixo da mesma são galáxias de luminosidade superficial alta. Isso implica que a razão massa-luz é de fato constante, o que significa que para termos mais luz, precisamos de mais estrelas, o que acarreta em mais massa, tornando a razão constante.

Como contraponto, analisemos a versão newtoniana da relação de Tully-Fisher. A aceleração gravitacional em uma órbita circular é dada por

$$a = G\frac{M}{r^2}, \quad (3.15)$$

onde fazemos  $a = v^2/r$  para obtermos

$$v^4 = \frac{(GM)^2}{r^2}. \quad (3.16)$$



Para que esta equação seja relacionada com a Equação (3.12), devemos introduzir a luminosidade. Para tal, utilizamos o conceito de luminosidade superficial média  $\Sigma$ , definida como

$$\Sigma = \frac{L}{A}, \quad (3.17)$$

onde  $A$  será aproximado como  $\pi r^2$  para estar de acordo com as suposições anteriores. Sendo assim, vemos que  $r^2 = L(\pi\Sigma)^{-1}$  e inserimos esta igualdade na Equação (3.16) para obtermos

$$v^4 = G^2 \frac{M^2}{L} \pi \Sigma. \quad (3.18)$$

Por fim, multiplicamos e dividimos por  $L$  e fazemos uso da razão massa-luz como na Equação (3.14), resultando em

$$v^4 = G\pi Y^2 \Sigma L. \quad (3.19)$$

De forma análoga, o produto  $Y\Sigma$  deve ser constante para que a relação de Tully-Fisher seja obtida. Como pressuposto,  $Y$  é constante, o que implica que  $\Sigma$  também deve ser. Porém, como dito anteriormente, as galáxias possuem altas e baixas luminosidades superficiais, o que nos mostra que  $\Sigma$  não pode ser constante – contrariando, então, a conclusão newtoniana sobre o fato.

Ainda sobre galáxias espirais, Milgrom deduziu que há uma densidade de massa superficial crítica  $\sigma_m$  da forma

$$\sigma_m \approx \frac{a_0}{G}. \quad (3.20)$$

Para valores de densidade superficial de massa  $\sigma$  superiores a  $\sigma_m$ , o sistema tem acelerações internas maiores que o valor de corte  $a_0$  e, portanto, encontra-se no regime newtoniano. As galáxias de alta luminosidade superficial média possuem  $\sigma \geq \sigma_m$ , e devem apresentar uma massa gravitacional um pouco diferente da prevista pela mecânica newtoniana. Por outro lado, galáxias de baixa luminosidade superficial apresentam baixas acelerações internas, o que implica que a diferença entre as massas dinâmica e observada é consideravelmente grande. As observações feitas mais tarde por (MCGAUGH; BLOK, 1998), confirmaram as grandes disparidades entre as massas em galáxias espirais de baixa luminosidade superficial média.

Como foi visto até aqui, a mecânica newtoniana modificada prevê de forma bastante precisa o comportamento de galáxias no geral, sem a necessidade de invocarmos o conceito de matéria escura. Obviamente, esta proposição não é uma teoria completa, pois suas equações não são deduzidas a partir de um princípio básico. Pode-se dizer que as equações de Milgrom são **equações funcionais**, ou seja, são equações que descrevem o comportamento de galáxias e aglomerados, pois foram criadas especificamente para isso (SCARPA, 2006). Desse modo, uma base teórica bem fundamentada é um ponto vital para o sucesso da mecânica newtoniana modificada como uma alternativa à matéria escura. Na próxima seção vamos apontar resumidamente alguns problemas que a mecânica newtoniana modificada encontrou ao longo do tempo e apresentaremos três propostas feitas pela comunidade científica como uma tentativa de dar um embasamento mais consistente para a hipótese de Milgrom.

## 3.2 Sobre os problemas e alternativas da mecânica newtoniana modificada

### 3.2.1 Os principais contratempos

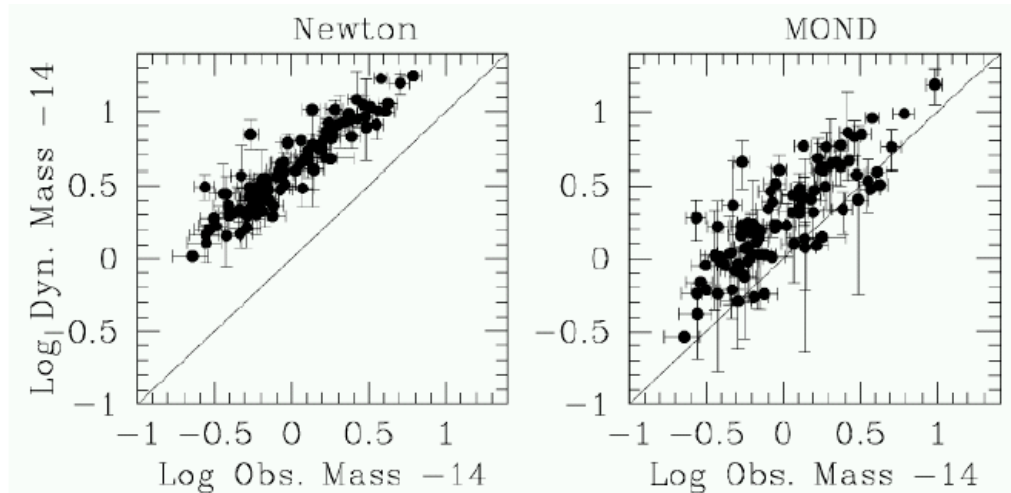
Como dito na Seção 3.1, o primeiro problema da mecânica newtoniana modificada é que esta foi proposta como uma hipótese baseada em equações funcionais para descrever sistemas gravitacionais. Isso implica que generalizações e extensões para teorias mais abrangentes se tornam muito difíceis, uma vez que o ponto de partida não é um conceito básico (BERTONE; HOOPER, 2018).

O segundo problema é a ausência da conservação de momento linear, momento angular ou energia quando aplicamos diretamente a Equação (3.2) em sistemas que não são altamente simétricos (FAMAHEY; MCGAUGH, 2012). Esse fato nos mostra que a abordagem de Milgrom deve ser uma aproximação de uma lei de força mais geral. Ou seja, as equações de Milgrom seriam casos particulares de uma teoria mais completa que explicaria não só a mecânica de galáxias e aglomerados mas também as anomalias observadas por Fritz Zwicky, Vera Rubin e Kent Ford sem a necessidade de invocarmos o conceito de matéria escura. Além disso, a não conservação de grandezas como momento e energia implica que não é possível obtermos uma conexão entre a mecânica newtoniana modificada e a relatividade geral, já que a tão bem sucedida teoria de Einstein tem como caso particular a mecânica newtoniana, que por sua vez, acarreta na conservação de tais grandezas.

O terceiro problema encontrado está diretamente ligado a origem do conceito de matéria escura e a proposição de Milgrom. Quando se trata de aglomerados de galáxias, a mecânica newtoniana modificada ainda não é capaz de eliminar a discrepância entre a massa observada e a massa necessária para manter um aglomerado estável. Ou seja, as equações de Milgrom não conseguem explicar completamente as altas velocidades das estrelas utilizando somente a massa gravitacional do sistema em questão, mas conseguem diminuir a discrepância previamente citada de um fator 10 para 2 (SCARPA, 2006). A Figura 3.3 mostra a comparação dos resultados obtidos pela mecânica newtoniana e a mecânica newtoniana modificada para aglomerados de galáxias, onde a linha contínua significa que não há necessidade de massa adicional para explicarmos o comportamento do sistema como um todo. Nessa figura é simples verificarmos que a discrepância mencionada cai muito quando utilizamos a mecânica newtoniana modificada, mas que ainda há um percentual de massa adicional no sistema.

Tais problemas não são os únicos, porém são de extrema importância para que possamos compreender melhor o atual estado da abordagem de Milgrom, suas falhas e sucessos. Para uma leitura mais detalhada sobre os problemas aqui citados, veja (FAMAHEY; MCGAUGH, 2012), (SCARPA, 2006) e (FAMAHEY; MCGAUGH, 2013). Agora nos resta apresentar três das principais propostas que procuram dar um embasamento teórico mais robusto para a mecânica newtoniana modificada e, eventualmente, tentar obter uma conexão entre ela e a relatividade geral.

Figura 3.3 – Gráficos comparando o excesso de matéria em aglomerados, segundo resultados da mecânica newtoniana (à esquerda) e da mecânica newtoniana modificada (à direita). No eixo-x temos a massa total observável (gás e estrelas) e no eixo-y temos a massa necessária para descrever a dinâmica dos aglomerados. A linha sólida diagonal representa o equilíbrio entre ambos os valores, onde o excesso de matéria não ocorre.



Fonte: (SCARPA, 2006)

### 3.2.2 As alternativas mais conhecidas

A primeira delas foi feita por (BEKENSTEIN; MILGROM, 1984), onde os autores buscaram manter as ideias básicas da hipótese de Milgrom, já que esta obteve sucesso em prever propriedades de galáxias e outros sistemas de maior escala. A principal diferença nesta nova abordagem, chamada de AQUAL<sup>2</sup> era a obtenção de um potencial não-relativístico diferente daquele utilizado na mecânica clássica, quando se tratava de sistemas gravitacionais. Esse potencial foi obtido a partir de uma modificação no lagrangiano que descreve a gravidade newtoniana, a fim de obtermos a conservação de momento linear, momento angular e energia do sistema quando adotamos as condições necessárias para aplicarmos a hipótese de Milgrom. Porém, esta abordagem ainda consistia em uma modificação da mecânica de Newton e não era compatível com a relatividade geral. Contudo, no mesmo artigo, os autores mencionaram algumas propriedades que deveriam ser obedecidas para que uma conexão entre a mecânica newtoniana modificada e a relatividade geral fosse obtida (BERTONE; HOOPER, 2018).

A segunda alternativa consistia em estender a abordagem AQUAL para uma versão relativística chamada RAQUAL<sup>3</sup> e foi descrita por (BEKENSTEIN; MILGROM, 1984) no mesmo artigo no qual os autores apresentam sua primeira alternativa. Essa abordagem consistia em escrever a interação entre matéria e radiação através de uma métrica diferente daquela que descreve o espaço-tempo padrão aplicado ao campo gravitacional. Essa diferença existe pois é adicionado um termo de campo escalar que contribui para o potencial gravitacional, juntamente com a matéria. Contudo, esta abordagem falhou em descrever os fenômenos das lentes gravitacionais, além de não conseguir atacar o problema da matéria escura em aglomerados de galáxias

<sup>2</sup> Do inglês *A Quadratic Lagrangian Theory*.

<sup>3</sup> Do inglês *Relativistic Quadratic Lagrangian Theory*.

Com isso, uma terceira alternativa surgiu. A teoria chamada TeVeS<sup>4</sup>, discutida por (BEKENS-TEIN, 2004) é, atualmente, a teoria mais discutida no campo da mecânica newtoniana modificada. Sua ideia principal consiste em adicionarmos dois campos, três parâmetros livres e uma função livre aos já existente na relatividade geral para que levemos em conta o fenômeno das lentes gravitacionais. Essa abordagem acaba tendo problemas como estabilidade de matéria (a descrição da matéria como um todo depende de fatores que são, teoricamente, livres) e outros contratempos mais complexos que não abordaremos aqui. Para uma discussão mais detalhada, veja (FAMAHEY; MCGAUGH, 2013).

Como pudemos ver nesse capítulo, a hipótese de Milgrom se baseia nas dificuldades técnicas impostas pela suposição da matéria escura. Para contornar esses problemas, Milgrom sugere que talvez não tenhamos compreendido completamente o conceito de gravidade nas escalas de galáxias e aglomerados. Segundo o físico, é possível que a gravidade se comporte de forma diferente nessas escalas, de forma que as acelerações dos sistemas fossem um importante fator que contribui para os efeitos anômalos que descrevemos ao longo desse capítulo. Desse modo, uma modificação na já conhecida mecânica newtoniana (que é a hipótese central de Milgrom) poderia nos retornar as informações dinâmicas corretas do sistema ao inserirmos o parâmetro de corte descrito na Seção 3.1. Já na Seção 3.1.1, discutimos algumas das previsões da mecânica newtoniana modificada, a fim de evidenciarmos que essa abordagem nos retorna informações importantes a respeito de galáxias e aglomerados. Como essas previsões foram confirmadas anos mais tarde, a hipótese de Milgrom mostrou que seu ferramental matemático não foi desenvolvido meramente como uma correção de escala, mas sim como uma nova abordagem gravitacional. Por fim, na Seção 3.2 abordamos os principais problemas encontrados quando utilizamos as ideias de Milgrom e quais são as mais importantes alternativas propostas pela academia científica para que contornemos tais problemas.

No próximo capítulo, iremos discutir dois artigos que aplicam a mecânica newtoniana modificada a Via Láctea e ao aglomerado de Coma, respectivamente. No primeiro, os autores (FAMAHEY; BINNEY, 2005) discutem diversas propriedades da hipótese de Milgrom quando aplicada ao âmbito de galáxias, bem como a precisão das previsões da mesma e os desdobramentos que se seguiram da aplicação de algumas funções de interpolação. Já no segundo artigo, (FABRIS; VELTEN, 2009), partindo de algumas suposições a respeito do aglomerado de Coma, aplica a mecânica newtoniana modificada utilizando um ferramental matemático bastante simples, mas efetivo, para calcular a razão massa-luz do mesmo, seguido de uma discussão sobre as limitações dessa abordagem. O intuito do próximo capítulo é realizar uma análise sobre os artigos citados aqui de forma que possamos observar com mais detalhes o funcionamento e as questões que surgem quando se emprega a mecânica newtoniana modificada.

---

<sup>4</sup> Do inglês *Tensor-Vector-Scalar gravity*

## 4 APLICAÇÃO DA MECÂNICA NEWTONIANA MODIFICADA

Neste capítulo, iremos discutir os principais pontos de dois artigos que tratam do tema deste Trabalho de Conclusão de Curso. O objetivo é demonstrar as consequências da aplicação da mecânica newtoniana modificada em galáxias e aglomerados para que possamos obter uma visão mais ampla do problema da matéria escura. Começamos com o artigo de (FAMAHEY; BINNEY, 2005), que trata da aplicação citada no na Via Láctea.

### 4.1 A mecânica newtoniana modificada no âmbito de galáxias

Observações atuais indicam que a Via Láctea é composta, quase que totalmente, por partículas que já conhecemos no Modelo Padrão da Física de Partículas (DIEMAND; MOORE; STADEL, 2004). A aparente ausência da hegemonia das partículas conhecidas se deve ao fato de que ainda é considerada a possibilidade da existência de matéria escura na galáxia, então devemos manter isso em mente. Contudo, isso não impediu que FAMAHEY; BINNEY se perguntassem se a mecânica newtoniana modificada seria capaz de modelar o comportamento galáctico observado.

Para que tratemos da nossa galáxia, temos que fazer algumas suposições básicas. A primeira delas feita pelos autores foi que a galáxia tem sua massa distribuída igualmente nos três eixos coordenados, ou seja, a distribuição da densidade de massa é constante. A segunda suposição foi que, na ausência da simetria previamente citada, as diferenças locais de densidade só se tornariam relevantes para um raio  $R \approx 1/2R_0$ , onde  $R_0$  é o chamado raio galactocêntrico do Sol (a distância do Sol até o centro da Via Láctea). Essa suposição é importante pois garante que os problemas encontrados no tratamento clássico (as divergências entre as velocidades previstas e observadas do sistema) não surjam quando a mecânica newtoniana modificada é empregada.

Feitas as suposições iniciais, os autores estavam aptos a analisar as curvas de rotação da Via Láctea, utilizando a Equação (3.4). Com isso, adotando valores de  $a_0 = 1,2 \times 10^{-8} \text{ cm.s}^{-2}$  e  $\Upsilon = 1,21$  fornecidos por análises de (BEGEMAN; BROEILS; SANDERS, 1991), juntamente com a função de interpolação na forma dada pela Equação (3.7), os autores obtiveram uma velocidade de rotação dada por

$$v_c = \begin{cases} 207 \text{ km.s}^{-1} & \text{para } R = 1/2R_0, \\ 200 \text{ km.s}^{-1} & \text{para } R = R_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Esse modelo foi chamado de Modelo *I*.

Para fins de comparação, a velocidade  $v_c$  medida para o caso onde se considera a existência de matéria escura na Via Láctea é de  $220 \text{ km.s}^{-1}$ , quando utilizamos  $\Upsilon = 1,08$  e  $a_0 = 0$  (este deve ser nulo pois é inserido no ferramental matemático por (MILGROM, 1983c) atuando como o valor de corte explicado no capítulo anterior). Vale notar que as velocidades de rotação em ambos os casos, apesar de não serem iguais, são muito próximas. Ainda nesse aspecto, se tais velocidades fossem idênticas em ambos os tratamentos, teríamos uma confirmação forte de que a mecânica newtoniana modificada é uma explicação alternativa à matéria escura e, além disso, tal igualdade mostraria de fato que a gravidade se comporta de maneira diferente do que Newton havia proposto.

De forma a obtermos o mesmo valor de velocidade de rotação para as duas abordagens, (FAMAIEY; BINNEY, 2005) sugerem que sejam alterados os valores de  $\Upsilon$  ou  $a_0$ , uma vez que não se tem certeza absoluta sobre suas magnitudes (essa incerteza pode ser atribuída às suposições feitas por (MILGROM, 1983c) ou imprecisão experimental, por exemplo). Sendo assim, um aumento no valor de  $\Upsilon$  para que as velocidades de rotação  $v_c$  nos dois modelos citados anteriormente fossem iguais acarretaria em um  $v_c(R = 1/2R_0)$  muito alto. Para compreender isso, lembremos da Equação (3.12), onde  $v^4 \propto L$ . Aqui, como  $\Upsilon = M/L$ , temos  $v^4 \propto M/\Upsilon$ , que nos mostra que à medida que  $\Upsilon$  cresce,  $v_c$  (ou  $v$ , já que significam a mesma coisa) diminui. Contudo, como a massa aumenta de acordo com o raio, este balanço acaba contribuindo para o aumento da velocidade final no ponto  $R = 1/2R_0$ .

Portanto, um aumento em  $\Upsilon$  apenas não nos retorna a igualdade de velocidades que queremos. Dessa forma, outro modelo de nome Modelo *II* surge como alternativa. Agora, ainda utilizando a mesma função de interpolação, os autores sugerem alterações nos valores de  $a_0$  e  $\Upsilon$  simultaneamente para  $a_0 = 3,4 \times 10^{-8} \text{ cm.s}^{-2}$  e  $\Upsilon = 0,91$ , obtendo assim a mesma velocidade de rotação calculada pela abordagem que leva em conta a matéria escura. O problema com o Modelo *II* é que a alteração no valor de  $a_0$  vai contra a proposição inicial de Milgrom feita em 1983, além de prever velocidades de rotação na borda da galáxia, que chamamos de  $v_\infty$ , de aproximadamente  $210 \text{ km.s}^{-1}$ , sendo o valor comum para tal grandeza algo como  $v_\infty = 175 \text{ km.s}^{-1}$  quando empregamos o valor de  $a_0$  calculado por (MILGROM, 1983c).

Com isso em mente, os autores precisaram verificar se esses novos valores de  $a_0$  e  $v_\infty$  eram compatíveis com outras galáxias, de forma proporcional ao tamanho da mesma. Para tal, a galáxia escolhida foi a NGC 3198, localizada na constelação de Ursa Maior. Essa escolha de galáxia foi feita pois já se conhecia muito sobre ela, e seus dados observacionais eram muito precisos. Para facilitar a compreensão, utilizaremos a Figura 4.1. Esta mostra uma comparação entre as informações já sabidas a respeito da galáxia e os modelos *I* e *II*, para seus respectivos valores de  $a_0$ . Como podemos ver pela Figura 4.1, o Modelo *II* não consegue descrever a dinâmica da galáxia escolhida, o que implica que o valor empregado de  $a_0$  nesse modelo não é válido para tal galáxia, e por extensão, para a Via Láctea (uma vez que o valor de corte deve ter caráter universal, como discutido na Seção 3.1.1). Essa comparação nos fornece uma importante conclusão: a função de interpolação dada pela Equação (3.7) e adotada por (FAMAIEY; BINNEY, 2005) não modela perfeitamente a Via Láctea, o que já basta para nos motivarmos a procurar outra forma para a função de interpolação  $\mu(x)$ .

Para tal, (FAMAIEY; BINNEY, 2005) sugerem uma função de interpolação com a forma

$$\mu(x) = \frac{x}{1+x}, \quad (4.2)$$

onde  $x = a/a_0$  novamente. É possível perceber nesse Modelo *III* que essa função não possui uma transição do limite inferior para o superior tão rápida quanto a anterior, como podemos ver na figura 3.1. Podemos perceber que há um problema de domínio na Equação (4.2), onde a relação  $x \neq -1$  deve ser obedecida, o que implica que  $a \neq -a_0$ , que, por sua vez, nos diz que a aceleração do sistema não pode ter módulo igual ao valor de corte. Além disso, vemos pela Figura 4.1 que a linha contínua que representa a função de interpolação dada pela Equação (4.2) nos fornece um ótimo *fit*

da curva dos dados observacionais da galáxia NGC 3198. Porém, (FAMAHEY; BINNEY, 2005) notaram que o valor da velocidade de rotação de  $v_c = 208 \text{ km.s}^{-1}$  não poderia ficar próximo do valor ideal de  $220 \text{ km.s}^{-1}$ , já que para tal, seria necessário aumentar o valor de  $a_0$ , que por consequência, os forçaria a diminuir o valor de  $\Upsilon$  e o ciclo se repetiria. Logo, é necessária uma função de interpolação mais robusta.

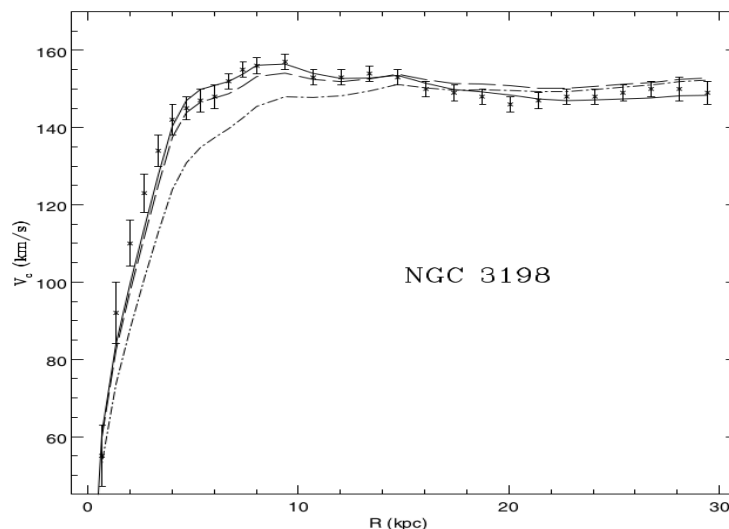
Assim, precisamos relembrar os dois tipos de galáxias, quanto a luminosidade. Como vimos na Seção 3.1.1, existem galáxias de alta e baixa luminosidade superficial. Para o segundo tipo, o módulo da aceleração da órbita circular é dada por

$$a = \left[ \frac{a_0 \Upsilon GL}{R^2} \right]^{1/2}, \quad (4.3)$$

de acordo com a Equação (3.14). Logo, as limitações numéricas são impostas somente sobre  $a_0$  e  $\Upsilon$ , nos permitindo testar uma gama de funções de interpolação. Para atingirmos o objetivo principal (obter uma velocidade de rotação  $v_c$  igual a medida pelo método que considera a matéria escura, como discutimos anteriormente), devemos nos preocupar, portanto, com a degenerescência de  $a_0$  e  $\Upsilon$ . (FAMAHEY; BINNEY, 2005) sugerem uma função de interpolação da seguinte forma: se soubermos com precisão os valores de  $v_\infty$  e  $L$ , então

$$x = \frac{v_c^2}{Ra_0} \quad (4.4)$$

Figura 4.1 – Gráfico de comparação entre os dados observacionais da galáxia NGC 3198, dados pelas barras de erro, e os modelos *I* e *II* (linha traçada e traçada-pontilhada, respectivamente) de acordo com os valores dados de  $a_0$ . A linha contínua se refere a outra função de interpolação que discutiremos mais tarde. No eixo x temos a distância a partir do centro e massa da galáxia e no eixo y a velocidade de rotação observada.



Fonte: (FAMAHEY; BINNEY, 2005).

implica que

$$\mu(x) = \Upsilon \frac{f(a_0x)}{a_0x}, \quad (4.5)$$

onde  $f(a_0x)$  é uma função auxiliar que é determinada pelo comportamento da função de interpolação ao lado esquerdo da Equação (4.5). Quando  $x \gg 1$ ,  $\mu(x) = 1$  e então  $f(a_0x) \propto a_0x$ . Já para valores de  $x \ll 1$ , a função de interpolação toma a forma  $\mu(x) = a/a_0$ , já que  $x = a/a_0$  nesse limite, resultando assim em  $f(a) \propto a^2/a_0$ . Assim, se pudermos determinar  $\Upsilon$  e  $a_0$  com precisão, estaremos aptos a determinar a função de interpolação na Equação (4.5).

Essa abordagem sugerida por (FAMAHEY; BINNEY, 2005) há de ser testada em galáxias de alta e baixa luminosidade superficial, para que possamos verificar sua validade geral. Além disso, como ficou claro ao decorrer da discussão sobre o artigo, temos muito a ser feito nesse campo de pesquisa, uma vez que os resultados experimentais divergem de acordo com a função de interpolação. Contudo, o objetivo final da hipótese de Milgrom está claro: descrever a mecânica de galáxias e aglomerados sem fazer uso do conceito de matéria escura, explicando também as altas velocidades de rotação observadas ao decorrer do tempo.

Na Tabela 4.1, apresentamos os resultados relevantes obtidos pelos três modelos discutidos aqui, onde são comparadas as velocidades de rotação  $v_c$  e outros dados de acordo com o modelo e função de interpolação. Além disso, foi feita uma comparação com modelos considerando a existência de matéria escura (essa caso é indicado pela sigla ME) e desconsiderando a mesma (caso indicado pela sigla S-ME).

Tabela 4.1 – Tabela comparativa dos modelos tratados ao longo do texto. Para as colunas, temos a função de interpolação  $\mu(x)$  utilizada, o valor do parâmetro de corte  $a_0$  em múltiplos de  $10^{-8} \text{ cm.s}^{-2}$ , a razão massa-luz que os autores chamam de  $\Upsilon_L$  empregada pelo modelo, a velocidade de rotação  $v_c(R_0)$  dada em  $\text{km.s}^{-1}$  medida no raio galactocêntrico  $R_0$  e a velocidade de rotação  $v_\infty$  na borda da Via Láctea dada nas mesmas unidades de  $v_c$ .

Modelo	$\mu(x)$	$a_0$	$\Upsilon_L$	$v_c(R_0)$	$v_\infty$
ME	1	0	1,08	220	235
S-ME	1	0	1,21	180	0
<i>I</i>	$x/\sqrt{1+x^2}$	1,2	1,21	200	175
<i>II</i>	$x/\sqrt{1+x^2}$	3,4	0,91	220	210
<i>III</i>	$x/(1+x)$	1,2	0,95	208	165
Ajuste	–	1,2	1,08	220	170

Fonte: (FAMAHEY; BINNEY, 2005)

Na próxima seção, iremos discutir o artigo de (FABRIS; VELTEN, 2009) e sua aplicação em aglomerados de galáxias, mais especificamente no aglomerado de Coma. Assim, poderemos comparar, até certo ponto, os próximos passos com os que (ZWICKY, 1933) utilizou dados na Seção 2.2



## 4.2 A mecânica newtoniana modificada no âmbito de aglomerados

A abordagem de (FABRIS; VELTEN, 2009) para tratar do problema em questão é um pouco diferente da que discutimos anteriormente. Ainda assim, podemos traçar um paralelo entre ambos os procedimentos para que possamos compreender o estado atual da mecânica newtoniana modificada em sua forma mais simples.

Como na seção anterior, os autores fazem algumas suposições sobre o aglomerado de Coma para que pudessem iniciar sua abordagem. A primeira delas é que o aglomerado é esféricamente simétrico. Ou seja, a distribuição de massa é constante ao longo de todo o aglomerado. Apesar dessa simplificação não representar um sistema estelar real, ela é o primeiro passo de qualquer abordagem física.

A segunda suposição é que o aglomerado é composto exclusivamente de matéria já conhecida pelo Modelo Padrão da Física de Partículas. Isso, novamente, reduz o grau de complexidade do sistema como um todo. Além, obviamente, de concordar com a premissa básica de Milgrom descrita na Seção 3.1. Vale notar também que muitos artigos como (MILGROM, 1983c) e (SCARPA, 2006) que tratam da aplicação da mecânica newtoniana modificada reforçam tal premissa em suas respectivas introduções, visto a popularidade do conceito de matéria escura.

Já a terceira suposição vai diretamente ao encontro do que foi discutido na Seção 2.2 no que se trata da validade da aplicação do teorema do virial em sistemas estelares. Nesse ponto do texto, procurávamos compreender se tal teorema poderia ser utilizado em sistemas que estivessem fora do equilíbrio mecânico. Como vimos na conferência de 1961, a comunidade científica determinou que eram necessárias mais informações sobre os sistemas de galáxias para que um consenso fosse alcançado sobre a validade supracitada. Nos dias atuais, o teorema do virial pode ser aplicado a aglomerados de forma satisfatória, sendo uma ferramenta muito utilizada na astronomia (PERKINS, 2009), o que significa que a validade mencionada é verdadeira. A terceira suposição feita por (FABRIS; VELTEN, 2009) faz uso dessa informação, onde os autores supõem que o aglomerado de Coma está em equilíbrio mecânico e que todos os membros desse são membros permanentes<sup>1</sup>.

Com essas três suposições bem definidas, podemos agora discutir em mais detalhes a abordagem tomada pelos autores. Em primeiro lugar, consideraremos que as estrelas realizam uma órbita circular em torno do centro de massa do aglomerado. Dito isso, utilizamos a Equação (3.2) para descrever a força que uma partícula teste de massa  $m$  sofre perante a gravidade do aglomerado de Coma de massa total  $M$ . Assim,

$$\begin{aligned} m\mu(x)\vec{a} &= -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \\ \mu(x)\vec{a} &= -G\frac{M}{r^2}\hat{r}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde  $\mu(x)$  é a função de interpolação,  $\vec{a}$  a aceleração total do sistema,  $G$  a constante universal da gravitação e  $r$  a distância entre o aglomerado e a partícula teste.

<sup>1</sup> Membros permanentes são corpos celestes que de fato fazem parte do aglomerado, ou seja, não são membros que passavam perto do campo gravitacional do conjunto e foram atraídos por ele de forma momentânea.

A função de interpolação sugerida pelos autores tem a forma

$$\mu(x) = \frac{1}{2x}([1 + 4x^2]^{1/2} - 1), \quad (4.7)$$

onde  $x = a/a_0$ . Podemos verificar que essa obedece os limites assintóticos estabelecidos pela Equação (3.3) olhando para a Figura 3.1. Agora tomamos o módulo da Equação (4.6), fazemos  $x \ll 1$  (que implica que  $\mu(x) = x$ ), onde usamos o fato de que  $x = a/a_0$  para obtermos

$$\begin{aligned} \mu(x)a_0x &= G\frac{M}{r^2} \\ \mu(x)x &= G\frac{M}{a_0r^2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

e assim, inserimos a função de interpolação dada pela Equação (4.7) na Equação (4.8) nos levando a

$$x\frac{1}{2x}([1 + 4x^2]^{1/2} - 1) = G\frac{M}{a_0r^2}. \quad (4.9)$$

Após isolarmos  $x$ , chegamos em

$$x^2 = \frac{G^2M^2}{a_0^2r^4} + \frac{GM}{a_0r^2}, \quad (4.10)$$

e ao tomar a raiz quadrada em ambos os lados, obtemos

$$x = \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{a_0^2r^4} + \frac{GM}{a_0r^2}} \quad (4.11)$$

onde escolhemos o sinal negativo fora da raiz, já que a aceleração tem que ser atrativa (com direção oposta ao versor  $\hat{r}$ ). Agora utilizamos novamente o fato de que  $x = a/a_0$  para obtermos (após colocar o termo  $a_0$  para dentro da raiz do lado direito da igualdade)

$$a = -\sqrt{a_0^2 \left[ \frac{G^2M^2}{a_0^2r^4} + \frac{GM}{a_0r^2} \right]}. \quad (4.12)$$

Agora podemos simplificar rapidamente essa equação, de forma que

$$a = -\sqrt{\left[ \frac{G^2M^2}{r^4} + \frac{GMa_0}{r^2} \right]} = -\frac{GM}{r^2} \sqrt{1 + \frac{a_0r^2}{GM}}. \quad (4.13)$$

Uma análise mais cuidadosa da Equação (4.13) irá nos retornar uma informação importante. Se relembarmos da Equação (3.6), veremos que o segundo termo dentro da raiz da Equação (4.13) é a aceleração do sistema no limite de  $x \ll 1$ , ou seja, esse termo é a aceleração obtida quando o sistema move-se devagar o bastante a ponto da mecânica newtoniana modificada entrar em vigor. Dessa forma, chamaremos essa aceleração de  $a_M$ , com o índice  $M$  se remetendo a Milgrom e sua hipótese. Além disso, o primeiro termo dentro da raiz da Equação (4.13) é a aceleração newtoniana convencional obtida quando  $x \gg 1$ , que chamaremos de  $a_N$  conforme a Seção 3.1. Logo, temos respectivamente para a aceleração newtoniana e para a aceleração da hipótese de Milgrom,

$$a_N^2 = \frac{G^2M^2}{r^4} \quad \text{e} \quad a_M^2 = \frac{GMa_0}{r^2}. \quad (4.14)$$

Logo, se substituirmos as Equações (4.14) na Equação (4.13), obtemos

$$\vec{a} = -\sqrt{a_N^2 + a_M^2} \hat{r}. \quad (4.15)$$

Ou seja, a Equação (4.15) expressa o módulo da aceleração total do sistema quando levamos em consideração a possibilidade de empregarmos a mecânica newtoniana modificada. Portanto, temos agora uma relação mais geral para a aceleração do sistema, já que basta lembrarmos que quando a aceleração  $a$  do sistema é maior que o valor de corte  $a_0$ , a mecânica vigente é a newtoniana padrão. Isso implica que  $a_M^2 = 0$  e assim, o resultado é  $a = a_N$ , como esperávamos.

Voltemos nossa atenção para a Equação (4.13). Nessa, (FABRIS; VELTEN, 2009) indicam uma quantidade chamada de raio crítico  $r_C$ , que é medido a partir do centro de massa do aglomerado. Esse raio é um análogo ao raio  $r = \sqrt{GM/a_N}$  proveniente da Equação (4.14) e é definido por  $r_C = \sqrt{GM/a_0}$ . O raio crítico  $r_C$  indica o ponto a partir do qual a mecânica newtoniana modificada se tornaria efetiva nesse tratamento matemático. Como uma das exigências de Milgrom descrita na Seção 3.1 diz que temos que recuperar as equação da mecânica newtoniana convencional no limite de aceleração total  $a > a_0$ , o raio crítico também deve obedecê-la. Nesse caso, o raio crítico obedece a exigência supracitada quando  $r_C \rightarrow \infty$ .

Definido o raio crítico, podemos inserí-lo na Equação (4.13) e continuar discutindo o artigo em questão em termos dessa quantidade. Assim, já na sua forma vetorial, a equação se torna

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_C^2}} \hat{r}. \quad (4.16)$$

Com a aceleração total do sistema em mãos, podemos calcular o potencial gravitacional e finalmente aplicar o teorema do virial no aglomerado de Coma utilizando as correções de escala da mecânica newtoniana modificada. Dadas essas correções, os autores (FABRIS; VELTEN, 2009) partem do princípio de que o potencial pode ser calculado a partir da força, seguindo a equação convencional  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ . Nesse caso, o potencial será calculado a partir da aceleração obtida na Equação (4.16), pois estamos tratando de força por unidade de massa  $m$ . Assim, o potencial gravitacional gerado pela escolha da função de interpolação indicada pela Equação (4.7) é dado por

$$\Phi(r) = -GM \left[ \frac{\sqrt{1 + r^2/r_C^2}}{r} - \frac{\sinh^{-1}(r/r_C)}{r_C} \right]. \quad (4.17)$$

Essa é a forma do potencial geral, que se torna o potencial gravitacional newtoniano quando  $r \ll r_C$ . Da mesma forma que antes, percebemos o efeito corretivo da mecânica newtoniana modificada, onde é gerado um potencial mais geral. O potencial é mais geral pois nos permite contabilizar os efeitos dos potenciais newtoniano e potencial gerado no regime de  $a < a_0$ .

Agora que sabemos a forma do potencial geral, podemos aplicar o teorema do virial. Nesse passo, os autores utilizam o teorema do virial no formato dado por (MARION; THORNTON, 2004):

$$K = \frac{1}{2} \sum_i \left\langle \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} \right\rangle m_i, \quad (4.18)$$

onde a energia cinética  $K$  é calculada quando somamos a contribuição de todos os componentes  $i$  com massa  $m_i$  que compõem o sistema. Assim, inserimos o potencial dado pela Equação (4.17) na Equação (4.18) para obter

$$K = \frac{GM(r)}{2r} \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_C^2} m}. \quad (4.19)$$

Para facilitar a compreensão da Equação (4.19), basta lembrarmos que estamos trabalhando com uma distribuição esférica constante de massa. Logo,  $m$  indica a massa de uma pequena casca esférica em um raio  $r$  e  $M(r)$  é a massa envolvida por essa casca.

O próximo passo é reescrever a energia cinética  $K$  calculada em termos de observáveis como a razão massa-luz  $\Upsilon$ , o brilho superficial  $I$  e a distribuição de velocidades  $\sigma$ . Para tal, precisamos lembrar que a energia cinética pode ser calculada através de análises de espectroscopia<sup>2</sup> da luz proveniente do aglomerado de Coma, além de outros métodos (veja, por exemplo, (NETO, 2000)). Aqui, iremos assumir que  $\Upsilon$  não depende do raio  $r$ . Além disso, precisamos encontrar qual a densidade de luminosidade  $j(r)$  do aglomerado, para que possamos determinar o brilho superficial  $I(r)$ . A densidade de luminosidade é definida como

$$\rho(r) = \Upsilon(r)j(r), \quad (4.20)$$

onde  $\rho(r)$  é a densidade de matéria que estamos considerando como constante, assim como  $\Upsilon$ .

Desse modo, podemos determinar o brilho superficial  $I(r)$  da forma

$$I(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} j(r)dz, \quad (4.21)$$

onde  $dz$  é um elemento infinitesimal da distância  $z$  definida como sendo a distância entre o observador e o plano onde a luminosidade do aglomerado se projeta. De forma simples, quando observamos o brilho de um corpo luminoso, estamos vendo sua luminosidade se propagar no espaço plano entre nós. Esse efeito ocorre pois, apesar de considerarmos o espaço como sendo tridimensional, a distância entre o observador e o corpo que emite luz é tão grande que acaba fazendo com que enxerguemos somente uma projeção da luz (como se estivéssemos olhando para uma lâmpada acesa que está a milhares de metros de distância e posicionada logo acima de um espelho, de forma que vemos sua luz emitida somente no espelho plano). A figura 4.2 serve como apoio visual. Agora podemos reescrever a Equação (4.21) em termos dos raios  $r$  e  $R$ , sendo  $r$  a distância medida a partir do centro na qual é projetada a luminosidade e  $R$  sendo o raio do aglomerado. Para tal, fazemos  $z^2 = r^2 - R^2$ , de acordo com a Figura 4.2 e obtemos

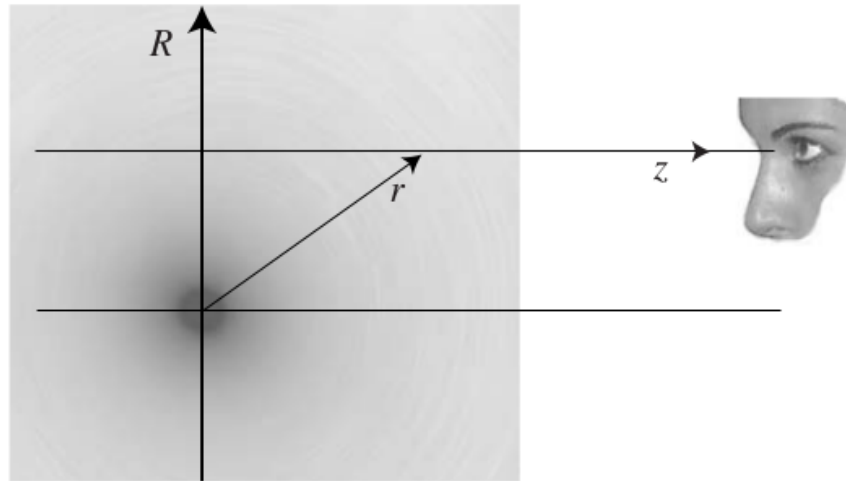
$$I(r) = 2 \int_R^{+\infty} j(r) \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}} = 2 \int_R^{+\infty} \frac{\rho(r)}{\Upsilon} \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - R^2}}. \quad (4.22)$$

Com isso, podemos inverter a Equação (4.22) de forma que

$$\frac{\rho(r)}{\Upsilon} = -\frac{1}{\pi} \int_r^{+\infty} \frac{dI(R)}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (4.23)$$

<sup>2</sup> De forma simples, a espectroscopia é a análise do espectro de radiação eletromagnética (da luz visível, nesse caso) emitida por corpos que nos retorna informações importantes sobre o sistema.

Figura 4.2 – Ilustração do efeito de projeção da luminosidade emitida por um corpo de raio  $R$  observada no ponto  $r$  por um observador a uma distância  $z$ .



Fonte: (NETO, 2000).

A Equação (4.23) nos permite calcular a razão massa-luz  $\Upsilon$ , já que sabemos a forma da energia cinética  $K$  dada pela Equação (4.19). Para tal, os autores utilizam a seguinte equação adicional existente na literatura:

$$K = \Upsilon J, \quad (4.24)$$

onde  $J$  é uma integral definida por

$$J = 3\pi \int_0^{+\infty} I(R) \sigma^2(R) R dR. \quad (4.25)$$

Para fins de simplicidade, podemos visualizar a Equação (4.25) como sendo a contribuição cinética para o teorema do virial, já que ela contém as velocidades das estrelas que compõem o aglomerado de Coma, bem como seu brilho superficial.

Assim, os autores combinam as Equações (4.19), (4.24) e (4.23) para encontrar a seguinte relação

$$\Upsilon = -2 \frac{J}{\hat{J}}, \quad (4.26)$$

sendo  $\hat{J}$

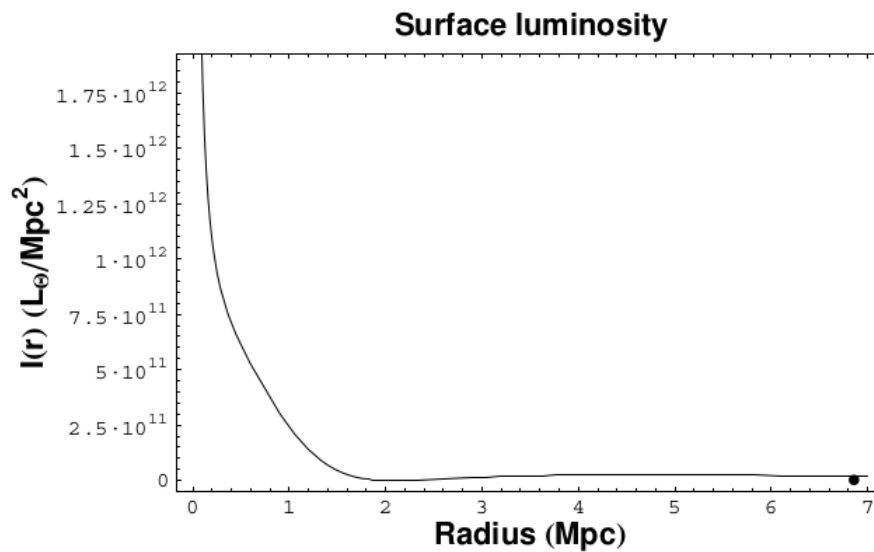
$$\hat{J} = -16G \int_0^{+\infty} t(r) p(r) r \sqrt{1 + \frac{r^2}{r_C^2}} dr. \quad (4.27)$$

A Equação (4.27) é proveniente de algumas manipulações algébricas e as funções  $t(r)$  e  $p(r)$  são funções auxiliares que nos permitem escrever  $\hat{J}$  como um termo cinético equivalente ao termo  $J$ , porém com a correção do termo radical. As funções  $t(r)$  e  $p(r)$  são dadas por

$$\begin{aligned} t(r) &= \int_0^{\infty} \frac{dI}{dR} \frac{dR}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \\ p(r) &= \int_0^r t(r') r'^2 dr' \end{aligned} \quad (4.28)$$

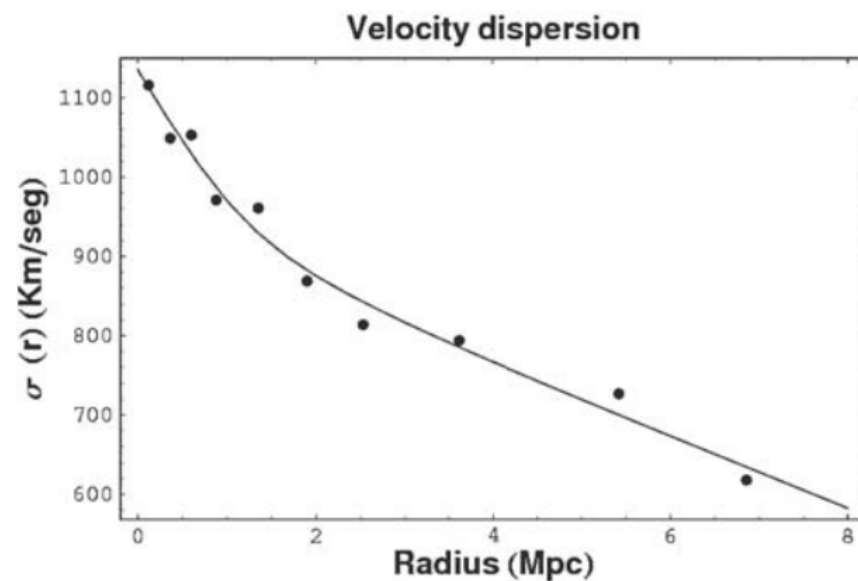
Por fim, podemos calcular a razão massa-luz se obtivermos as informações sobre o brilho superficial  $I(r)$  e a dispersão de velocidades  $\sigma(R)$ . Note que toda a construção feita aqui foi direcionada para esse momento, onde reescrevemos a segunda lei de Newton utilizando a hipótese de Milgrom, calculamos as correções que surgem dessa hipótese e agora reduzimos o problema a obter informações de observáveis do aglomerado que estamos estudando. Dessa forma, utilizando os dados fornecidos por Kent e Gunn (1982), os autores obtiveram os perfis de brilho superficial e dispersão de velocidades mostrados pelas Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente.

Figura 4.3 – Perfil do brilho superficial  $I(r)$  do aglomerado de Coma.



Fonte: (FABRIS; VELTEN, 2009)

Figura 4.4 – Perfil da dispersão de velocidades  $\sigma$  do aglomerado de Coma.



Fonte: (FABRIS; VELTEN, 2009)

No que diz respeito ao método de verificação para o ajuste das curvas, os autores não utilizaram nenhum modelo dinâmico para tal. O processo foi baseado na inferência estatística<sup>3</sup> seguindo o modelo da minimização de  $\chi^2$ , que é muito utilizado em diversas áreas do conhecimento.<sup>4</sup> Para o caso que estudamos aqui, os autores separaram os membros permanentes do aglomerado em grupos com vinte galáxias cada, de forma radial. Além disso, o raio da casca que envolve cada grupo é obtido através da média aritmética dos raios individuais do grupo em questão. Quanto ao formato matemático das funções que melhor se encaixam nos dados, os autores procuraram obter funções polinomiais, exponenciais ou combinações desses dois tipos. Com tais informações em mãos, é possível calcularmos as integrais  $J$  e  $\hat{J}$ , de forma a obtermos o valor de  $\Upsilon$  (que dependerá apenas do valor do raio crítico obtido anteriormente). A Tabela 4.2 mostra os valores de  $\Upsilon$  calculados para diferentes valores de  $r_C$  provenientes de variações na definição numérica de  $a_0$ .

Tabela 4.2 – Tabela comparativa dos valores para a razão massa-luz  $\Upsilon$  obtida dada em múltiplos de  $M_\odot/L_\odot$  de acordo com o raio crítico  $r_C$  dado em múltiplos de  $Mpc$  que depende do parâmetro de corte  $a_0$  referentes ao aglomerado de Coma.

$r_C(Mpc)$	$\Upsilon_M$	$a_0(m.s^{-2})$
0,05	3,6	$1.7 \times 10^{-7}$
0,1	7,2	$7 \times 10^{-7}$
0,2	14,4	$2.7 \times 10^{-8}$
0,3	21,6	$1.5 \times 10^{-8}$
0,4	28,6	$9.7 \times 10^{-9}$
0,5	35,5	$6.8 \times 10^{-9}$
0,6	42,3	$5.1 \times 10^{-9}$
0,7	48,9	$4.0 \times 10^{-9}$
0,8	55,3	$3.1 \times 10^{-9}$
0,9	61,6	$2.6 \times 10^{-9}$

Fonte: (FABRIS; VELTEN, 2009)

Como passo final, analisemos a Tabela 4.2. Para um raio crítico de 0,05Mpc, a razão massa-luz de 3,6 nos mostra que, se assumimos as hipóteses de Milgrom, não há matéria escura no aglomerado de Coma, já que  $\Upsilon \approx 1$  indica que a quantidade de matéria presente é suficiente para produzir a luminosidade observada (e manter o aglomerado com velocidades razoáveis). Por outro lado, o valor associado para o parâmetro de corte  $a_0 = 1,7 \times 10^{-7} m.s^{-2}$  acaba sendo diferente do obtido originalmente por (MILGROM, 1983a), o que indicaria que  $a_0$  não possui caráter universal, como discutido na Seção 3.1. Contudo, as diferenças aqui citadas podem ser geradas

<sup>3</sup> O processo de inferência estatística consiste em fazer afirmações sobre uma população a partir de uma amostra.

<sup>4</sup> O modelo da minimização de  $\chi^2$  procura uma curva que minimize a diferença entre os valores previstos pelos pesquisadores e os observados.

pela simplicidade da análise feita pelos autores, além de imprecisão na obtenção dos dados e outros fatores.

É evidente que a mecânica newtoniana modificada nos retorna resultados bastante diferentes quando comparados aos obtidos por (ZWICKY, 1933), descritos na Seção 2.2. Ao discutirmos a aplicação da hipótese de Milgrom no âmbito de galáxias na Seção 4.1, ficou claro que, nessa escala, a mecânica newtoniana modificada não é capaz de descrever a dinâmica do sistema de forma precisa. As divergências existentes nos resultados obtidos, que mudam consideravelmente de acordo com a escolha da função de interpolação, nos mostram que as exigências de (MILGROM, 1983c) não são completamente obedecidas. O significado desses acontecimentos ainda é incerto na literatura, visto que ainda são necessários mais testes e experimentos. Uma abordagem completamente nova para a obtenção de dados sobre a Via Láctea, utilizando aprendizado de máquina<sup>5</sup>, está começando a ser utilizada (CIUCĂ *et al.*, 2020). Então é possível que tenhamos resultados melhores em um futuro próximo. Quanto a aplicação discutida na Seção 4.2, fomos capazes de obter valores mais interessantes para a razão massa-luz. Obviamente, há algumas incertezas no quesito da precisão dos mesmos, porém, uma análise ou simulação computacionais podem fornecer resultados melhores (ZDEBOROVÁ, 2017).

---

<sup>5</sup> Do inglês *machine learning*, que consiste em fornecer alguns dados já conhecidos para um algoritmo de forma que esse possa prever novos dados.



## 5 CONCLUSÕES

Como foi observado ao longo do texto, o ramo de pesquisa que trata da matéria escura é vasto e pode ser dividido em dois grupos: aqueles que acreditam em sua existência, se esforçando diariamente para detectá-la e aqueles que a descartam, propondo modelos gravitacionais alternativos para explicar os fenômenos descritos previamente. Tal impasse, que intriga desde pesquisadores de renome até jornalistas curiosos, continua sem solução definitiva.

Porém, no que se trata da solução descrita em detalhes aqui, a mecânica newtoniana modificada se mostra ser uma solução razoável quando se trata de reduzir os valores da razão massa-luz  $\Upsilon$  para patamares menores. Obviamente, os efeitos de correção da hipótese de Milgrom não nos retornam respostas para todas as perguntas desse ramo, como pudemos verificar na seção 3.2. Contudo, esse pode ser o primeiro passo de uma nova teoria da gravidade que explicaria todos os efeitos anômalos observados com a vantagem de ser matematicamente simples.

Nesse contexto, há um processo ainda bastante incerto sobre a hipótese de Milgrom: a mecânica newtoniana modificada pode ser incorporada pela Relatividade Geral como um caso particular? A academia científica ainda não tem uma resposta para isso, visto que ainda estão sendo sugeridos modelos teóricos baseados na hipótese de Milgrom. Contudo, como vimos na seção 3.2.2, algumas alternativas estão sendo propostas. Sendo assim, nos resta aguardar o surgimento de uma abordagem mais robusta para a hipótese de Milgrom, para que, eventualmente, essa ideia possa ser colocada na forma de um lagrangeano e assim, seja inserida na Relatividade Geral.

Quanto ao estado atual das pesquisas que procuram evidências da matéria escura, esse processo ainda se mostra muito incerto. Os experimentos, que se dividem em dois grupos: aqueles que procuram partículas candidatas e aqueles que procuram evidências observacionais diretas da matéria escura, também não encontraram uma resposta definitiva para o problema. Nas pesquisas que tratam de partículas, hipóteses como candidatos além do Modelo Padrão, Supersimetria e outras já estão sendo estudadas. Para os experimentos que procuram evidências em escalas de galáxias e aglomerados, novos processos observacionais são criados a todo instante, porém, o sucesso ainda não foi alcançado.

Todas essas incertezas podem dar a impressão de que nada se sabe sobre o tema. Contudo, uma breve análise da literatura nos mostra que, apesar de não sabermos o que a matéria escura **é**, já sabemos o que ela **não pode ser**. Como dito na Seção 2.1, as partículas que conhecemos não podem descrever a matéria escura pelos motivos que já discutimos. Além disso, novos candidatos como os MACHOs, que são aglomerações de matéria comum, também já foram descartados. Esse é sempre o primeiro passo da pesquisa como um todo. Eliminamos hipóteses ao invés de tentar confirmá-las cegamente. Assim, o ramo de pesquisa da matéria escura irá se aperfeiçoando ao longo do tempo, cultivando ideias e captando a atenção de mentes curiosas ao redor do mundo. E por ora, nos resta aguardar o avanço teórico do tema, para que, no futuro, tenhamos uma solução definitiva para o problema.



## REFERÊNCIAS

- AMBARTSUMIAN, VA. La structure et l'évolution de l'univers. **Editions Stoops, Bruxelles**, p. 241, 1958.
- ANGELIS, Alessandro De; PIMENTA, Mário João Martins. **Introduction to Particle and Astroparticle Physics**: questions to the universe. Itália: Springer, 2015.
- BAUER, Martin; PLEHN, Tilman. **Yet Another Introduction to Dark Matter**: the particle physics approach. 1. ed. Estados Unidos: Springer, 2019.
- BEGEMAN, K. G. Hi rotation curves of spiral galaxies. i. ngc 3198. **Astronomy and Astrophysics**, v. 223, 1989. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/full/1989A%26A...223...47B>. Acesso em: 12 agosto 2020.
- BEGEMAN, K. G.; BROEILS, A. H.; SANDERS, R. H. Extended rotation curves of spiral galaxies : dark haloes and modified dynamics. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 249, p. 523–537, 1991. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1991MNRAS.249..523B>. Acesso em: 30 dezembro 2020.
- BEKENSTEIN, Jacob. Relativistic gravitation theory for the modified newtonian dynamics paradigm. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 70, Oct 2004. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.083509>. Acesso em: 16 novembro 2020.
- BEKENSTEIN, Jacob; MILGROM, Mordehai. Does the missing mass problem signal the breakdown of newtonian gravity? **The Astrophysical Journal**, v. 286, p. 7–14, Nov 1984. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1984ApJ...286....7B>. Acesso em: 16 novembro 2020.
- BERGSTRÖM, Lars; GOOBAR, Ariel. **Introduction to Particle and Astroparticle Physics**. 2. ed. Alemanha: Springer, 2004.
- BERTONE, Gianfranco; HOOPER, Dan. History of dark matter. **Reviews of Modern Physics**, v. 90, Oct. 2018. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.045002>. Acesso em: 07 julho 2020.
- BERTONE, Gianfranco; HOOPER, Dan; SILK, Joseph. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. **Physics Reports**, v. 405, p. 279–390, Apr. 2005. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2004.08.031>. Acesso em: 11 julho 2020.
- BOVEIA, Antonio; DOGLIONI, Caterina. Dark matter searches at colliders. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, v. 68, n. 1, p. 429–459, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1146/annurev-nucl-101917-021008>. Acesso em: 10 julho 2020.
- BUCHMUELLER, Oliver; DOGLIONI, Caterina; WANG, Lian-Tao. Search for dark matter at colliders. **Nature Physics**, v. 13, p. 217–223, July 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nphys4054>. Acesso em: 10 julho 2020.
- CIUCĂ, Ioana *et al.* Unveiling the distinct formation pathways of the inner and outer discs of the milky way with bayesian machine learning. **arXiv: Astrophysics of Galaxies**, 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2003.03316>. Acesso em: 09 janeiro 2021.
- DIEMAND, Jurg; MOORE, Ben; STADEL, Joachim. Convergence and scatter of cluster density profiles. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 353, p. 624–632, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.08094.x>. Acesso em: 01 janeiro 2020.

- EINASTO, Jaan; KAASIK, Ants; SAAR, Enn. Dynamic evidence on massive coronas of galaxies. **Nature**, v. 250, n. 5464, p. 309–310, July 1974. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1974Natur.250..309E>.
- FABRIS, J.C.; VELTEN, H.E.S. Mond virial theorem applied to a galaxy cluster. **Brazilian Journal of Physics**, scielo, v. 39, p. 592–595, Set. 2009. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-97332009000500015&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-97332009000500015&nrm=iso). Acesso em: 15 julho 2020.
- FAMAEY, Benoit; BINNEY, James. Modified newtonian dynamics in the milky way. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 363, p. 603–608, 2005. Disponível em: <https://inspirehep.net/literature/686207>. Acesso em: 25 dezembro 2020.
- FAMAEY, Benoit; MCGAUGH, Stacy. Modified newtonian dynamics (MOND): Observational phenomenology and relativistic extensions. **Living Reviews in Relativity**, v. 15, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.12942/lrr-2012-10>. Acesso em: 2 agosto 2020.
- FAMAEY, Benoit; MCGAUGH, Stacy. Challenges for CDM and MOND. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 437, Apr 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.10882F1742-65962F4372F12F012001>. Acesso em: 16 novembro 2020.
- FENG, Jonathan L. Dark matter candidates from particle physics and methods of detection. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 48, n. 1, p. 495–545, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-082708-101659>. Acesso em: 15 julho 2020.
- FRENK, Carlos S.; WHITE, Simon. D. M. Dark matter and cosmic structure. **Annalen der Physik**, v. 524, n. 9-10, p. 507–534, Oct. 2012. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.201200212>. Acesso em: 8 julho 2020.
- HOLMBERG, Erik. On the clustering tendencies among the nebulae. **Astrophysical Journal**, v. 92, p. 200, Sep. 1940. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1940ApJ....92..200H>. Acesso em: 16 fevereiro 2021.
- KAPTEYN, Jacobus Cornelius. First attempt at a theory of the arrangement and motion of the sidereal system. **Astrophysical Journal**, v. 55, p. 302–328, 1922.
- KELVIN, Lord. **Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light**. 1. ed. Estados Unidos: Johns Hopkins university, 1904. Disponível em: <https://archive.org/details/baltimorelecture00kelviala>. Acesso em: 11 janeiro 2021.
- KENT, S.M.; GUNN, J.E. The dynamics of rich clusters of galaxies. i. the coma cluster. **The Astronomical Journal**, v. 87, p. 945–960, July 1982. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1982AJ....87..945K>. Acesso em: 07 janeiro 2020.
- LINSKY, Bernard; IRVINE, Andrew David. Principia mathematica. In: ZALTA, Edward N. (Ed.). Fall 2019. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2019. Disponível em: <https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/principia-mathematica/>. Acesso em: 13 agosto 2020.
- MARION, J. B.; THORNTON, S. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5. ed. Estados Unidos: Saunders College Publishing, 2004.
- MCGAUGH, Stacy S.; BLOK, W. J. G. de. Testing the dark matter hypothesis with low surface brightness galaxies and other evidence. **The Astrophysical Journal**, v. 499, n. 1, p. 41–65, Maio 1998. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/305612/meta>. Acesso em: 8 agosto 2020.

MEESSEN, Auguste. Astrophysics and dark matter theory. **Journal of Modern Physics**, v. 8, n. 2, p. 268–298, 2017. Disponível em: <https://www.scirp.org/journal/paperinformation.aspx?paperid=74434>. Acesso em: 25 julho 2020.

MICHELL, John. **VII. On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose. By the Rev. John Michell, B.D. F.R.S. In a letter to Henry Cavendish, Esq. F.R.S. and A.S.** 1784. 35-57 p. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rstl.1784.0008>. Acesso em: 6 agosto 2020.

MILGROM, Mordehai. A modification of the newtonian dynamics: implications for galaxy systems. **Astrophysical Journal**, v. 270, p. 384–389, 1983. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983ApJ...270..384M/abstract>. Acesso em: 10 agosto 2020.

MILGROM, Mordehai. A modification of the newtonian dynamics: Implications for galaxies. **The Astrophysical Journal**, v. 270, p. 371–383, 1983. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983ApJ...270..384M>. Acesso em: 2 agosto 2020.

MILGROM, Mordehai. A modification of the newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. **The Astrophysical Journal**, v. 270, p. 365–370, 1983. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1983ApJ...270..365M>. Acesso em: 2 agosto 2020.

MILGROM, Mordehai. Mond vs. dark matter in light of historical parallels. **Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics**, 2020. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.shpsb.2020.02.004>. Acesso em: 3 agosto 2020.

NETO, Gastão Bierrenbach Lima. Introdução a dinâmica estelar. Notas de aula do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas (IAG) da Universidade de São Paulo (USP). 2000. Disponível em: <http://www.astro.iag.usp.br/~gastao/dinamica/CursoDin2000.pdf>. Acesso em: 25 dezembro 2020.

OORT, Jan Hendrik. The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems. **Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands**, v. 6, Aug 1932. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1932BAN.....6..249O>. Acesso em: 8 agosto 2020.

OSTRIKER, J. P.; PEEBLES, P. J. E.; A.YAHIL. The size and mass of galaxies, and the mass of the universe. **Astrophysical Journal**, v. 193, Oct. 1974. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1974ApJ...193L...1O>. Acesso em: 16 fevereiro 2021.

PERKINS, Donald. **Particle Astrophysics**. 2. ed. Estados Unidos: Oxford University Press, 2009.

PROFUMO, Stefano; GIANI, Leonardo; PIATTELLA, Oliver Fabio. An introduction to particle dark matter. **Universe**, v. 5, n. 10, 2019. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2218-1997/5/10/213>. Acesso em: 15 agosto 2020.

RUBIN, Vera C.; FORD, Jr. W. Kent. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. **The Astrophysical Journal**, v. 159, p. 379–404, Feb 1970. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1970ApJ...159..379R>. Acesso em: 8 novembro 2020.

SANDERS, R.H.; VERHEIJEN, M.A.W. Rotation curves of uma galaxies in the context of modified newtonian dynamics. **Astrophysical Journal**, v. 503, 1998. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1086/305986>. Acesso em: 7 agosto 2020.

SCARPA, Riccardo. Modified newtonian dynamics, an introductory review. **AIP Conference Proceedings**, v. 822, Jan. 2006. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/astro-ph/0601478.pdf>. Acesso em: 3 agosto 2020.

S.ROBERTS, M.; H.ROTS, A. Comparison of rotation curves of different galaxy types. **Astronomy and Astrophysics**, v. 26, p. 483–485, Aug. 1973. Disponível em: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1973A&A....26..483R>. Acesso em: 16 fevereiro 2021.

TULLY, R.B.; FISHER, J.R. A new method of determining distances to galaxies. **Astron. Astrophys.**, v. 54, p. 661–673, 1977.

VELTEN, Hermano Endlich Schneider. **Quando gravitação e cosmologia destoam do padrão: Testando mond e modelos de unificação do setor escuro**. 2011. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Espírito Santo, 2011. Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/7473>. Acesso em: 25 novembro 2020.

ZDEBOROVÁ, Lenka. New tool in the box. **Nature Physics**, v. 13, p. 420–421, 2017. Disponível em: <https://www.nature.com/articles/nphys4053>. Acesso em: 09 janeiro 2021.

ZHAO, H. S.; FAMAHEY, B. Refining the mond interpolating function and teves lagrangian. **The Astrophysical Journal**, v. 638, n. 1, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1086/500805>. Acesso em: 10 janeiro 2021.

ZWICKY, Fritz. The redshift of extragalactic nebulae. **Helvetica Physica Acta**, v. 6, p. 110–127, 1933. Traduzido para o Inglês por Heinz Andernach. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1711.01693v1>. Acesso em: 2 agosto 2020.

ZWICKY, Fritz. On the mass of nebulae and of clusters of nebulae. **The Astrophysical Journal**, v. 86, n. 3, p. 217–246, Oct. 1937. Acesso em: 6 agosto 2020.