UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS

Instituto de Física e Matemática

Bacharelado em Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Estrutura e estabilidade das estrelas estranhas

Lucas da Silva Lazzari

Pelotas, 2019

Lucas da Silva Lazzari

Estrutura e estabilidade das estrelas estranhas

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física e Matemática da Universidade Federal de Pelotas, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Victor Paulo Gonçalves

Pelotas, 2019

Universidade Federal de Pelotas / Sistema de Bibliotecas
Catalogação na Publicação

L432e Lazzari, Lucas

Estrutura e estabilidade das estrelas estranhas / Lucas Lazzari ; Victor Paulo Gonçalves, orientador. — Pelotas, 2019.

109 f. : il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física) — Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2019.

1. Estrelas estranhas. 2. Matéria estranha de quarks. 3. Estrelas de nêutrons. 4. Pulsares. 5. Modelo de sacola do MIT. I. Gonçalves, Victor Paulo, orient. II. Título.

CDD : 523.019

Elaborada por Ubirajara Buddin Cruz CRB: 10/901

Lucas da Silva Lazzari

Estrutura e estabilidade das estrelas estranhas

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Física, Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas.

Data da defesa: 29 de novembro de 2019

Banca Examinadora:

Carlos Alberto V. M. Jr

Prof. Dr. Carlos Alberto Vaz de Morais Junior
Doutor em Física – Universidade Federal de Pelotas

Maurício Jeomar Piotrowski

Prof. Dr. Maurício Jeomar Piotrowski
Doutor em Física – Universidade Federal de Pelotas

Werner Sauter

Prof. Dr. Werner Krambeck Sauter
Doutor em Física – Universidade Federal de Pelotas

Dedico este trabalho à minha namorada Nickeli pela amizade e carinho.

Agradecimentos

À minha namorada pela compreensão, motivação, sinceridade e por sempre me elevar como pessoa. À toda minha família, em especial aos meus pais pelo suporte e incentivo e, também, aos meus avós pela paciência e bom humor no dia a dia.

Ao professor Victor pela dedicação, paciência e ensinamentos passados durante estes anos de graduação. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico por financiar esta pesquisa.

Resumo

LAZZARI, Lucas. **Estrutura e estabilidade das estrelas estranhas**. Orientador: Victor Paulo Gonçalves. 2019. 109 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Pelotas, 2019.

Devido às elevadas densidades presentes em uma estrela de nêutrons, faz-se necessário investigar o estado da matéria contido nestes objetos. Neste trabalho, nosso objetivo é apresentar uma das possíveis constituições para uma estrela de nêutrons. Iremos analisar uma matéria composta inteiramente por quarks livres, contendo os quarks *up*, *down* e *strange*, chamada de matéria estranha de quarks. Assumimos pela hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa que esta matéria é absolutamente estável com relação à matéria nuclear ordinária. Estrelas compostas pela matéria estranha de quarks são chamadas estrelas estranhas. As estrelas de nêutrons típicas possuem massa igual a 1,4 $M_\odot$ e raio igual a 10 km. Utilizando o chamado modelo de sacola do MIT para descrever uma estrela estranha, obtemos massa e raio de aproximadamente 1,6 $M_\odot$ e 9 km, respectivamente. Além disso, mostramos que as estrelas estranhas são estáveis a partir do seu perfil massa-pressão central, tornando-as uma possível configuração para estrelas de nêutrons.

Palavras-chave: Estrelas estranhas. Matéria estranha de quarks. Estrelas de nêutrons. Pulsares. Modelo de sacola do MIT.

Abstract

LAZZARI, Lucas. **Structure and stability of strange stars**. Advisor: Victor Paulo Gonçalves. 2019. 109 p. Monography (Bachelor in Physics) – Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, 2019.

Due to the high densities present in neutron stars, it is necessary to investigate the state of matter inside those objects. In this work, our main goal is to present one of the possible constitutions for neutron stars. We shall consider a matter formed by free quarks composed by the up, down and strange quarks called strange quark matter. We shall assume as valid the Bodmer-Witten-Terazawa hypothesis which states that the strange quark matter is absolutely stable in relation to the ordinary nuclear matter. Typical neutron stars have a mass of about $1.4\,M_\odot$ and a radius of about 10 km. By using the MIT bag model to describe a strange star, we obtained a mass and a radius of approximately $1.6\,M_\odot$ and 9 km respectively. Furthermore, we show that strange stars are stable by analyzing their mass-central pressure profile, making them a possible configuration for neutron stars.

Keywords: Strange stars. Strange quark matter. Neutron stars. Pulsars. MIT bag model.

Lista de Figuras

Lista de Abreviaturas e Siglas

TOV Tolman-Oppenheimer-Volkoff

QCD *Quantum Chromodynamics*

MIT *Massachusetts Institute of Technology*

SQM *Strange Quark Matter*

TCC Trabalho de Conclusão de Curso

HR Hertzprung-Russel

EHT *Event Horizon Telescope*

QFT *Quantum Field Theory*

QED *Quantum Eletrodynamics*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As estrelas despertaram o interesse da humanidade antes mesmo do advento da ciência. A partir da sua observação, imaginamos as constelações e as utilizamos muitas vezes como um guia para navegação. Atualmente, estudamos a constituição e evolução das estrelas, desde a sua formação em uma nuvem de poeira e gás, até o seu final em um objeto compacto (CARROLL; OSTLIE, 2007; KARTTUNEN *et al.*, 2007). Descobrimos também que todos os elementos químicos pesados – com número atômico maior do que o do lítio – são formados no interior das estrelas, através do processo de fusão nuclear. Assim, uma estrela passa 90% de sua vida fundindo hidrogênio em hélio no seu núcleo, na chamada sequência principal (GLENDENNING, 1997; JACKSON *et al.*, 2005). Esse processo é responsável pela produção de uma pressão expansiva no seu interior, que equilibra a contração gravitacional causada pela própria massa da estrela. Quando o hidrogênio acaba no núcleo, a estrela começa a fundir elementos mais pesados. A partir deste ponto, o futuro da estrela é determinado por sua massa original, se tornando, no final, um buraco negro ou uma estrela compacta, na forma de uma anã branca ou uma estrela de nêutrons (CAMENZIND, 2007; WEBER, 1999).

A pressão que sustenta uma estrela compacta tem origem quântica e é uma consequência do princípio de exclusão de Pauli, onde férmions, como elétrons e nêutrons, não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente (ZETTILI, 2009). Isto leva a um aumento no número de partículas para cada nível de energia, tornando-o degenerado e, por isso, chamamos essa pressão de pressão de degenerescência. Devido à teoria da relatividade restrita, a energia possui um limite, já que nenhuma partícula pode atingir uma velocidade maior do que a da luz. Sendo assim, o limite de energia resulta em uma pressão de degenerescência máxima, para um determinado tipo de partícula. Isso implica na chamada massa de Chandrasekhar[1] (CHANDRASEKHAR, 1931; PINOCHET; JAN, 2016; SAGERT *et al.*, 2006), uma massa limite para que elétrons consigam suportar a contração gravitacional, a partir da qual outras partículas, como nêutrons, devem produzir a pressão de degenerescência.

Estrelas são objetos massivos, cuja evolução e propriedades são descritas pelas leis da gravitação, isto é, pelas equações do campo gravitacional de Einstein presentes na teoria da relatividade geral (CHENG, 2005; FAYYAZUDDIN; RIAZUDDIN; ASLAM, 2015). Nesta teoria, a gravidade é o resultado da curvatura do espaço-tempo, que por sua vez, foi curvado pela presença de matéria e energia. Entretanto, a Lei da Gravitação Universal proposta por Newton (NEWTON, 1999) é aplicável à maior parte dos objetos astrofísicos como cometas e asteróides, que apresentam baixas densidades e cujo movimento pode ser calculado desta forma, além de descrever com excelente precisão a órbita dos planetas ao redor do Sol e a vasta maioria das estrelas presentes no Universo. Visto desta forma, a gravitação newtoniana é uma excelente aproximação, que fornece resultados precisos quando os campos gravitacionais forem de baixa intensidade (DAS, 2011). Entre os grandes sucessos da teoria da relatividade geral estão o cálculo do perihélio de Mercúrio (previsto erroneamente pela gravitação

[1] A massa de Chandrasekhar M_{Ch} é aproximadamente $1{,}45\,\mathrm{M}_{\odot}$ (ver apêndice A sobre as unidades utilizadas neste texto).

de Newton) e a previsão da existência de buracos negros, além de descrever com precisão as estrelas mais densas. Neste último caso, a descrição é feita através da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939; TOLMAN, 1939), que é a solução das equações de Einstein do campo gravitacional para uma estrela com simetria esférica, estática e composta por um fluido ideal isotrópico, que está derivada no apêndice B. Essa equação, por sua vez, relaciona a variação da pressão no interior da estrela com a variação do seu raio, podendo ser aplicada para diferentes equações de estado (GLENDENNING, 2007; WEBER, 1999).

Estrelas com massas menores do que $8\,M_\odot$, após a queima de elementos pesados, expelem grande parte de sua massa ao espaço interestelar, formando uma nebulosa planetária, o que caracteriza seu fim. O núcleo da estrela permanece devido à pressão de degenerescência dos elétrons, definindo assim a chamada anã branca (JACKSON *et al.*, 2005; SAGERT *et al.*, 2006). As anãs brancas são compostas principalmente por oxigênio e carbono, possuindo massas típicas entre $0{,}6\,M_\odot$ e $1\,M_\odot$, com raios de poucos milhares de quilômetros, similares ao da Terra (GLENDENNING, 1997).

Estrelas massivas, com massas superiores a $8\,M_\odot$, conseguem queimar elementos ainda mais pesados em processos exotérmicos, até formarem um núcleo composto predominantemente por ferro (CAMENZIND, 2007). Assim, o processo se torna endotérmico, levando ao colapso da estrela numa enorme explosão, denominada supernova. Se a massa do objeto remanescente for menor do que a massa de Chandrasekhar, o núcleo se torna uma estrela de nêutrons (GLENDENNING, 1997; NYÍRI, 2001). Com a ação gravitacional muito intensa, devido à massa original da estrela, a pressão de degenerescência dos elétrons não é capaz de suportar o colapso. De fato, se torna energeticamente mais favorável para que prótons capturem elétrons, formando nêutrons e neutrinos. Os neutrinos escapam da estrela, levando parte da energia gravitacional, deixando os nêutrons para evitar o colapso (WEBER, 1999). Tipicamente, estrelas de nêutrons possuem massas em torno de $1{,}4\,M_\odot$ e raios de aproximadamente 10 km, sendo muito mais compactas do que as anãs brancas.

Os objetos observados que usualmente são associados às estrelas de nêutrons, são os **pulsares** (CAMENZIND, 2007; GLENDENNING, 1997). Pela imensa frequência de rotação e por emitirem radiação, pulsares são análogos aos faróis marítimos. Por essas características, Gold (1968) propôs que pulsares seriam estrelas de nêutrons rotantes. Entretanto, o nome “estrelas de nêutrons”, proposto primeiramente por Baade e Zwicky (1934), leva ao conceito equivocado de que estas estrelas são constituídas somente por nêutrons. Como foi mostrado por Oppenheimer e Volkoff (1939), um gás degenerado de nêutrons livres seria capaz de sustentar uma massa de apenas $0{,}7\,M_\odot$. O pulsar mais massivo, chamado MSP J0740+6620 (CROMARTIE *et al.*, 2019), descoberto recentemente, possui massa de $2{,}14\,M_\odot$. Desta forma, fica claro que nem todos pulsares podem ser constituídos somente por nêutrons (WEBER, 1999) e, que como mostramos no capítulo 4, outras partículas deverão estar presentes. Se nenhuma partícula for capaz de suportar o colapso gravitacional, o objeto que se forma é um buraco negro (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2004). Então, vale ressaltar que o nome estrela de nêutrons será designado para uma vasta categoria de objetos teóricos, enquanto o nome pulsar será utilizado especificamente para os objetos observados.

Dentre todos as estrelas que compõem o Universo, as estrelas de nêutrons são as mais

densas já observadas. A descrição da sua constituição está diretamente associada à compreensão da teoria das interações fortes, a Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*), um dos ramos da teoria do Modelo Padrão da Física de Partículas (HALZEN; MARTIN, 1984; THOMSON, 2013). De acordo com esta teoria, nêutrons não são partículas elementares, uma vez que são constituídos por quarks, estas sim ditas elementares. Quarks e antiquarks são definidos a partir da carga elétrica, da massa e do spin, como também da carga de cor, responsável pela interação forte, que é mediada pelos glúons. As possíveis cargas de cor são o vermelho, o azul e o verde. Além dos quarks e glúons, nenhuma outra partícula possui carga de cor. Existem seis sabores de quarks: *down* (d), *up* (u), *strange* (s), *charm* (c), *bottom* (b) e *top* (t)[2], listados por ordem crescente de massa, como mostraremos em mais detalhe na seção 3.1. Assim como elétrons e nêutrons, quarks são férmions, partículas de spin semi-inteiro sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli (THOMSON, 2013).

As partículas formadas pelos quarks são chamadas de hádrons, compostas de tal forma que sua carga de cor é nula. Assim, estados com três quarks, chamados bárions, são possíveis, pois cada quark possui uma cor, resultando em uma combinação "incolor" (HALZEN; MARTIN, 1984). A matéria, como a conhecemos, é dita bariônica, já que prótons e nêutrons são bárions compostos por quarks u e d. Outros exemplos de bárions são os híperons, que além dos quarks u e d, possuem também o quark s em diferentes combinações, como sss e uds. Assim, quarks ganham outra propriedade, o número bariônico igual a um terço, já que os bárions possuem número bariônico igual a um. Devido ao comportamento da interação forte (que cresce com a distância) e de quarks nunca terem sido detectados livres, define-se o conceito de confinamento dos quarks no interior dos hádrons. Por outro lado, a interação entre quarks nas curtas distâncias associadas ao interior dos hádrons é desprezível, levando ao conceito de liberdade assintótica, ou seja, que quarks se comportam como partículas livres no interior dos hádrons (CHEUK-YIN, 1994; THOMSON, 2013).

Na QCD, a intensidade da interação depende das circunstâncias em que esta ocorre. Sendo assim, quando esta intensidade for suficientemente baixa, um tratamento perturbativo é válido, senão, a teoria de perturbação não pode ser aplicada. A caracterização dos hádrons em grandes escalas espaciais, como aquelas presentes em estrelas, é de caráter não perturbativo, com soluções difíceis de serem obtidas (CHEUK-YIN, 1994). Portanto, modelos fenomenológicos, inspirados pelos resultados da QCD na rede[3], são úteis na descrição dos hádrons e também para tratar estados exóticos da matéria. Um dos modelos fenomenológicos amplamente utilizados na literatura, e que reproduz os conceitos de confinamento e liberdade assintótica, foi proposto no *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), e é conhecido como modelo de sacola do MIT (CHODOS *et al.*, 1974; FUNE, 2012), onde os hádrons são pensados como uma sacola contendo os quarks. O movimento dos quarks livres no interior da sacola gera uma pressão, que é contrabalanceada por uma pressão do vácuo, chamada pressão de sacola.

Dentro do modelo de sacola do MIT, entende-se que existem possíveis configurações nas

---

[2] Utilizaremos as nomenclaturas em inglês, por serem mais comuns na literatura.

[3] A QCD na rede é um método de estudo de efeitos não perturbativos, que interpreta o espaço-tempo como uma rede discreta (WILSON, 1974).

quais a pressão exercida pelos quarks ultrapasse a pressão de sacola, levando ao rompimento desta e produzindo uma matéria de quarks livres, chamada plasma de quarks e glúons. Isto pode ocorrer em situações exóticas de altas temperaturas e/ou densidades bariônicas elevadas (CHEUK-YIN, 1994). Entretanto, de acordo com a hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa, inicialmente proposta por Bodmer (BODMER, 1971), reforçada por Witten (WITTEN, 1984) e Terazawa (TERAZAWA, 1989), a matéria de quarks livres contendo os quark u, d e s, chamada de matéria estranha de quarks (SQM, do inglês *Strange Quark Matter*) é o estado fundamental da matéria que interage fortemente, sendo a configuração mais estável existente. Essa hipótese não contradiz o fato da matéria nuclear ser extremamente mais comum no Universo, pois esta seria um estado metaestável com um tempo de vida da ordem de 10^{14} vezes a idade estimada do Universo (BODMER, 1971).

Um dos objetivos da QCD é descrever a interação hadrônica nos regimes de alta energia e densidade elevada, como aqueles presentes em uma estrela de nêutrons. Tal descrição permanece um tema de intenso debate. Ainda assim, entende-se que em decorrência das interações fortes, em altas densidades hadrônicas, híperons sejam produzidos (GLENDENNING, 1997; SCHAFFNER-BIELICH *et al.*, 2002), permitindo que a estrela possua uma camada composta por nêutrons e um núcleo formado por híperons e, até mesmo, de fases mistas. Como existem vários tipos de híperons, diversas combinações de matéria hadrônica são possíveis (SCHAFFNER-BIELICH *et al.*, 2002). Considerando que a densidade presente nas estrelas de nêutrons seja suficiente para que ocorra o rompimento da sacola, espera-se que uma matéria de quarks livres, juntamente com nêutrons e híperons, forme a estrela. Estas seriam as chamadas estrelas híbridas, com a crosta formada por matéria hadrônica e o núcleo formado por quarks livres (WEBER, 1999). As possibilidades mais extremas são a de uma estrela composta inteiramente por uma matéria de quarks livres, constituída apenas por quarks u e d ou pela SQM (GLENDENNING, 1997). Esta última é chamada estrela estranha[4] (ALCOCK; FARHI; OLINTO, 1986). Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) trataremos apenas das estrelas estranhas e das híbridas, considerando o núcleo formado por SQM.

Nossos resultados principais são pertinentes às estrelas estranhas. Acerca destas, começaremos por demonstrar que, em altas densidades bariônicas, a SQM é mais estável do que a matéria ordinária e do que a matéria de quarks ud livres (FUNE, 2012; WITTEN, 1984), para uma gama de valores da pressão de sacola (FARHI; JAFFE, 1984; AZIZ *et al.*, 2019). Iremos obter, a partir da teoria da relatividade geral, as relações massa-raio e massa-pressão central, a fim de definir as propriedades das estrelas estranhas, como massa e raio típicos, além de averiguar a sua estabilidade. Para tanto, as equações de estado serão obtidas na aproximação para uma matéria de quarks fria, ou seja, à temperatura zero, a partir do modelo de sacola do MIT (WEBER, 1999). Este estudo é similar ao desenvolvido por Kettner *et al.* (1995), onde eles analisam a estabilidade das estrelas estranhas e das estrelas *charm*[5] de forma mais completa (e complexa), levando em conta as oscilações radiais da estrela e o modelo de sacola do MIT (KETTNER *et al.*, 1995). Um estudo mais recente acerca da estabilidade das estrelas de quarks, tanto as estranhas como as compostas por uma matéria de quarks ud, foi feito através de um modelo dinâmico, diferente do modelo de sacola do MIT, e pode ser

[4] Tradução livre do termo *strange star*, em inglês.

[5] Em referência à presença do quark *charm*.

visto na referência (WANG; ZHAO; ZONG, 2019).

Inicialmente, vamos obter as equações de estado para quarks não massivos e, posteriormente, para quarks massivos. A aproximação de temperatura zero é válida, pois, passado algum tempo da sua criação, essas estrelas têm temperaturas desprezíveis na escala nuclear. Enquanto isso, a aproximação de quarks não massivos (limite ultrarrelativístico) é apropriada por estarmos tratando apenas de quarks leves (GLENDENNING, 1997). Por fim, faremos a comparação dos resultados obtidos para quarks não massivos e massivos (caso relativístico), analisando as regiões de estabilidade da estrela e os impactos que variações na pressão de sacola infligem nos resultados.

Por simplicidade, consideraremos uma estrela estranha no final de sua evolução, implicando que esta estrela fria perdeu sua energia de rotação e está estática. Por ser estática e esfericamente simétrica, além de composta por um gás ideal relativístico e degenerado de quarks, é apropriado o uso da equação TOV. Muitos autores consideram o efeito da rotação (GLENDENNING; WEBER, 1992; GLENDENNING, 1997; WEBER, 1999; ZHOU *et al.*, 2019), inclusive na massa máxima que estas estrelas podem possuir (SZKUDLAREK *et al.*, 2019). Além disso, em vista da detecção das ondas gravitacionais no evento GW170817 (ABBOTT *et al.*, 2017), alguns autores sugeriram que as estrelas compactas que fundiram podiam ser estrelas estranhas, e a partir disso, procuram por sinais únicos destes objetos (MANNARELLI; TONELLI, 2018).

Este TCC está estruturado da seguinte maneira. No capítulo 2 apresentamos o referencial teórico associado às teorias da gravitação, além de demonstrar a evolução e as principais propriedades das estrelas. No capítulo 3 mostramos uma revisão do Modelo Padrão da física de partículas, seguida da hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa e da descrição de uma estrela estranha a partir da sua equação de estado. No capítulo 4 apresentamos uma revisão das possíveis constituições de estrelas de nêutrons, passando o foco para as estrelas estranhas, mostrando os resultados obtidos. Por fim, no capítulo 5 faremos algumas considerações finais.

2 GRAVITAÇÃO E ESTRELAS COMPACTAS

Neste capítulo explanaremos os conceitos referentes ao estudo de estrelas compactas. Começaremos explorando as teorias da gravitação, a partir das quais podemos descrever uma estrela e discutir sua estabilidade. Posteriormente, será resumido o processo da evolução estelar. No final da evolução estelar, um objeto compacto – uma anã branca, estrela de nêutrons ou um buraco negro – é formado, assim, discutiremos suas respectivas formações, descrições e observações.

2.1 Gravitação – de Newton à Einstein

Ao final de seu livro *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Newton descreve a força gravitacional como a causa do movimento do Sol e dos planetas ao seu redor. Segundo ele, esta ação a distância era proporcional à quantidade de matéria sólida contida em cada objeto (massa), e que se propaga com o inverso quadrado da distância (NEWTON, 1999). Em uma notação moderna, escrevemos o que ficou conhecida como a Lei da Gravitação Universal (NUSSENZVEIG, 2013)

$$\mathbf{F} = m_g \mathbf{g}(r) \ , \tag{2.1}$$

onde m_g é a massa gravitacional e $\mathbf{g}$ é o campo gravitacional, dado por

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \ , \tag{2.2}$$

que é ocasianado pela massa M, localizada na origem do sistema de referência à uma distância r de m_g.

Foi descoberto por Galileo, com resultados mais satisfatórios obtidos posteriormente por Huygens, que corpos submetidos apenas a força gravitacional da Terra ($g \simeq 9{,}98\,\mathrm{m\,s^{-2}}$), caem em direção ao seu centro com uma taxa independente de sua massa (WEINBERG, 2008). Ao usar sua segunda lei, Newton foi capaz de concluir que a força exercida pela gravidade era proporcional à massa do corpo em que a força age. Por sua terceira lei a força também é proporcional à massa da fonte do campo gravitacional. Newton estava consciente que a 'massa inercial' (presente na segunda lei, isto é, $\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}$) não era necessariamente igual à 'massa gravitacional', escrita na equação (2.1). Estando o corpo sob a ação somente da força gravitacional, a segunda lei implica (WEINBERG, 2008)

$$\mathbf{a} = \left(\frac{m_g}{m_i}\right)\mathbf{g}, \tag{2.3}$$

que seria diferente para diferentes corpos com razões entre as massas inercial e gravitacional distintas. Newton colocou a prova esta ideia utilizando-se de pêndulos compostos por diferentes materiais, porém de mesmo comprimento onde o período é proporcional à $(m_i/m_g)^{1/2}$. Apesar dos experimentos serem imprecisos, a diferença encontrada entre as massas não era significativa. De acordo com estes resultados, Bessel, e posteriormente Eötvös, mostraram por diferentes métodos que a razão entre as massas inercial e gravitacional não variava para diferentes substâncias por uma parte em 10^9. Estes resultados inspiraram Einstein a postular o princípio da equivalência, como uma das partes fundamentais da teoria da relatividade geral (WEINBERG, 2008).

A dependência da força gravitacional com o inverso do quadrado da distância entre os corpos já havia sido, rudimentarmente, sugerida por outros: como Johannes Scotus Erigena, cuja proposta mencionava que o peso e a leveza dos objetos variavam com a sua distância perante a Terra; Adelard de Bath, que elucidou que uma pedra ao cair em um poço muito profundo, não poderia ultrapassar o centro da Terra; e Ismael Bulliadus, que em 1640 foi o primeiro a sugerir a dependência da força gravitacional com o inverso quadrado da distância (WEINBERG, 2008). Entretanto, Newton foi o responsável por deduzir a lei do inverso quadrado da distância para a força gravitacional, a partir de observações da lua, em 1665 ou 1666. Tal resultado não foi publicado imediatamente, já que Newton não sabia explicar o fato de que havia tratado a Terra como se toda a sua massa estivesse concentrada em seu centro. Após o estímulo de Edmund Halley, em 1684, Newton terminou os cálculos, provando que os planetas se moviam de acordo com sua lei da gravitação e que esta estava em completa concordância com as leis empíricas propostas por Kepler (NEWTON, 1999).

As leis de Newton também determinam um conjunto especial de referenciais, os chamados referenciais inerciais, nos quais um corpo obedece estas leis. A transformação de um referencial inercial para outro é dada pelas transformações de Galileo, que em sua forma mais geral transforma as coordenadas $(\mathbf{r},t)$ de um referencial inercial S para outro referencial inercial S' com coordenadas $(\mathbf{r}',t')$, sendo dadas por (WEINBERG, 2008)

$$\mathbf{r}' = R\mathbf{r} + \mathbf{V}t + \mathbf{D}\,, \tag{2.4}$$

$$t' = t + \tau\,, \tag{2.5}$$

onde R simboliza uma matriz de rotação (real e ortogonal), $\mathbf{V}$, $\mathbf{D}$ e τ são quaisquer constantes reais que representam, respectivamente, a velocidade entre os referenciais e os deslocamentos entre as origens espaciais e temporais. Essas transformações foram um grupo de 10 parâmetros – os três ângulos de Euler que determinam R, as três componentes de $\mathbf{V}$ e $\mathbf{D}$, e a componente temporal τ –, o chamado grupo de Galileo (WEINBERG, 2008). As leis de Newton (incluindo a lei da gravitação universal) são invariantes perante as transformações presentes no grupo de Galileo. E esta invariância recebe o nome de princípio da relatividade galileana (CHENG, 2005).

As leis de Newton, apesar de obedecerem ao princípio da relatividade galileana, não eram invariantes perante um vasto conjunto de transformações, incluindo referenciais girantes (dependência temporal de R) ou com movimento acelerado (dependência temporal de $\mathbf{V}$) entre si. Entretanto, as leis de Maxwell, que descrevem a eletrodinâmica, não se mantinham invariantes perante uma transformação de Galileo. Dentre as predições da eletrodinâmica, a mais notória é o valor constante da velocidade da luz no vácuo c (ACIOLI, 2004; CHENG, 2005). Tal predição não é sustentada por uma transformação de Galileo de um referencial inercial S para um referencial S' com velocidade $\mathbf{V}$ em relação a esse (WEINBERG, 2008). Isto pode ser visto ao derivarmos a equação (2.4) em relação ao tempo, e considerando os referenciais como tendo os eixos cartesianos paralelos, isto é, $(R = 1)$, obtemos

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{V}\,, \tag{2.6}$$

o que não sustenta a constância da velocidade da luz no vácuo. Diversas tentativas nos anos subsequentes de explicar a variância das equações de Maxwell perante o grupo de Galileo foram

realizadas. A mais memorável foi a introdução de um meio de propagação da luz, o éter (ACIOLI, 2004). Todavia, nenhuma verificação experimental apoiou a existência do éter, indicando que, de fato, as leis de Maxwell estavam corretas em prever a constância da velocidade da luz no vácuo.

Partindo deste ponto, em 1905, Einstein, apoiado nos trabalhos de Lorentz e Poincaré, estabelece a teoria da relatividade restrita. Esta se baseia em dois postulados, expostos a seguir (EINSTEIN *et al.*, 1905; FAYYAZUDDIN; RIAZUDDIN; ASLAM, 2015):

I) as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;

II) a velocidade da luz no vácuo é constante e possui o mesmo valor c em todos os referenciais inerciais.

Sendo válidos estes postulados, as transformações de Galileo não são corretas, no que diz respeito à reexpressar as leis da física em diferentes referenciais inerciais. O novo grupo de transformações, descoberto por Lorentz e incluído por Einstein em sua teoria, é o chamado **grupo de Lorentz**, dado por (CHENG, 2005; DAS, 2011)[1]

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{v^2}\mathbf{v} - \gamma\mathbf{v}t\,, \tag{2.7}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{c^2}\right)\,, \tag{2.8}$$

que, assim como o grupo de Galileo, possui 10 parâmetros, e onde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Estas transformações mantém as leis de Maxwell invariantes em quaisquer referenciais inerciais, e como consequência, a constância da velocidade da luz no vácuo (WEINBERG, 2008). Porém, o mesmo não pode ser dito das leis de Newton, já que estas não são invariantes perante as transformações de Lorentz.

A teoria da relatividade restrita coloca as coordenadas espaciais e temporais em um mesmo nível. De certa forma, o tempo deixa de ser um parâmetro e passa a ser uma coordenada, que se transforma de acordo com a equação (2.8). Assim, passa a ser conveniente introduzirmos o conceito de quadrivetor, isto é, uma única grandeza física cujas componentes representam a dimensão temporal e as três dimensões espaciais (DAS, 2011). Em notação indicial e em unidades naturais, onde $c = \hbar = k_B = 1$ (ver seção A.2), escrevemos (CHENG, 2005)[2]

$$x^\mu = (t, \mathbf{r}), \quad \mu = 0,1,2,3\,, \tag{2.9}$$

onde $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$, em coordenadas cartesianas.

O módulo de um quadrivetor é definido como (DAS, 2011)

$$x^2 = \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = t^2 - \mathbf{r}^2\,, \tag{2.10}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é um tensor de rank-2 chamado de métrica do espaço-tempo quadridimensional ou de métrica de Minkowski. Esta métrica é simétrica e diagonal com componentes (CHENG, 2005)

$$\eta_{\mu\nu} = 0, \quad \text{se} \quad \mu \neq \nu\,, \tag{2.11}$$

$$\eta_{00} = -\eta_{ii} = 1\,, \quad i = 1,2,3\,. \tag{2.12}$$

[1] Aqui, representando um sistema S' de mesma origem espaço-temporal e com eixos paralelos à S.

[2] Para nós, os índices gregos variam de 0 à 3, enquanto os índices latinos variam de 1 à 3.

Esta definição de módulo pode ser interpretada como uma redefinição do produto escalar, ou seja, o comprimento de um vetor é reinterpretado no espaço de Minkowski, podendo possuir valor negativo (FAYYAZUDDIN; RIAZUDDIN; ASLAM, 2015).

Conquanto o módulo de um quadrivetor deva se manter igual em qualquer referencial inercial, ou seja, deva ser um invariante de Lorentz, é mais conveniente introduzir uma outra grandeza invariante de Lorentz, o intervalo infinitesimal, às vezes chamado de elemento de linha do espaço quadridimensional, dado por (CHENG, 2005)[3]

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2 \ . \tag{2.13}$$

As transformações de Lorentz satisfazem a propriedade física da invariância da velocidade da luz no vácuo. Porém, a teoria do eletromagnetismo de Maxwell e os postulados da relatividade restrita de Einstein continuam descrevendo uma pequena parcela da natureza. Em outras palavras, as leis físicas ainda estavam limitadas aos referenciais inerciais (WEINBERG, 2008).

Foi somente em 1916 que Einstein, em seu artigo entitulado “A fundação da Teoria da Relatividade Geral” (EINSTEIN, 1916), foi capaz de generalizar as leis físicas para qualquer referencial, não apenas os inerciais. Os três princípios básicos da teoria da relatividade geral, são enunciados a seguir (WEINBERG, 2008):

a) **Princípio da equivalência**: propõe que, em uma região suficientemente localizada do espaço-tempo e adjacente à uma concentração de massa, o comportamento físico dos corpos não pode ser distinguido, por qualquer experimento, do comportamento físico dos corpos dentro de uma região de apropriada aceleração uniforme.

b) **Princípio da covariância**: as leis físicas devem assumir a mesma forma independente do referencial, ou seja, devem manter sua forma perante um amplo conjunto de transformações de coordenadas.

c) **Princípio da consistência**: a lei da gravitação universal de Newton deve ser um caso limite da teoria da relatividade geral, devido aos seus excelentes resultados como, por exemplo, o cálculo das órbitas dos planetas.

O princípio da equivalência foi postulado ainda em 1907, quando Einstein usou os resultados de Huygens e Eötvös, já citados anteriormente, estabelecendo a igualdade entre as massas gravitacional e inercial. A partir deste princípio, foi possível estabelecer o desvio gravitacional da luz para o vermelho, ou por seu nome em inglês (mais comum na literatura): *redshift* (WEINBERG, 2008). Uma analogia utilizada para auxiliar na visualização da deflexão gravitacional da luz é a seguinte: consideremos uma pessoa (observador) em um elevador (laboratório) no espaço, sendo que esta pessoa não é capaz de ver o que acontece fora do elevador. Ao largar diversas massas diferentes ao seu redor, o observador percebe que todas caem com a mesma aceleração. Sabemos pelas leis de Newton que este observador se encontra em uma de duas situações: ou o elevador está

[3] Índices repetidos representam um somatório sobre o índice: $x^\mu x_\mu = \sum_\mu x^\mu x_\mu$.

suficientemente perto de uma grande massa (por exemplo, a Terra) que gera um campo gravitacional uniforme; ou ele se encontra em um elevador com aceleração constante para cima, causando a impressão de que todas as massas estariam caindo. Entretanto, apenas pela observação das massas, este observador não é capaz de distinguir as duas situações possíveis. Considerando o caso onde o elevador está sendo acelerado para cima, ao colocar um pulso de luz em uma extremidade e um detector na extremidade oposta do elevador, ele observa que o pulso de luz é curvado pela aceleração. Pelo princípio da equivalência, isto deve ocorrer de maneira idêntica na presença de uma grande concentração de massa gravitacional, implicando que o campo gravitacional gerado pela massa tem a capacidade de curvar um raio de luz (FAYYAZUDDIN; RIAZUDDIN; ASLAM, 2015; DAS, 2011). Ao tentar calcular a deflexão da luz para o Sol em 1911, Einstein percebe a necessidade de um melhor entendimento acerca do campo gravitacional, já que tal princípio nos informa apenas sobre os efeitos do campo e não sobre a sua estrutura. Este efeito só foi verificado experimentalmente em 1916, por Arthur Eddington, durante um eclipse solar, sendo uma das grandes comprovações observacionais da teoria da relatividade geral (WEINBERG, 2008).

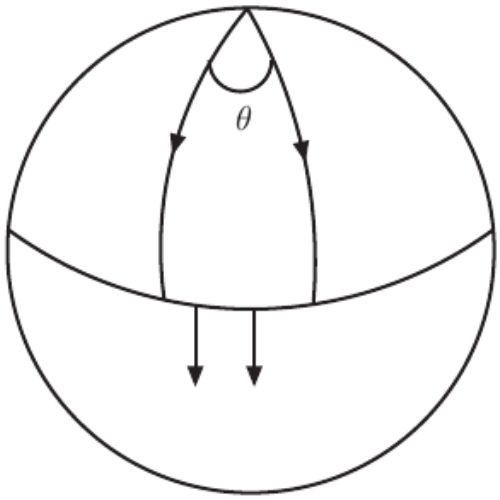
Podemos reinterpretar o princípio da equivalência da seguinte maneira: ao invés de considerarmos que o campo gravitacional causou a deflexão da luz, podemos considerar que a luz continua propagando-se em linha reta pelo espaço-tempo. Implicando, assim, que o campo gravitacional não mais afetaria a trajetória da luz, mas sim, que este alterou a curvatura do espaço-tempo por onde a luz se propaga. Vista desta forma, a teoria da relatividade geral torna-se uma teoria geométrica (CHENG, 2005), onde a métrica de Minkowski é um caso particular do espaço-tempo plano, sem a presença de campos gravitacionais. O elemento de linha, invariante (agora, não mais só das transformações de Lorentz) pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \ , \tag{2.14}$$

onde, de maneira geral, $g_{\mu\nu}(x) \neq \eta_{\mu\nu}$, é o tensor métrico do espaço-tempo curvo, que possui dependência com as coordenadas. Na teoria geométrica da gravitação, o tensor métrico contempla toda a informação necessária para a descrição da curvatura do espaço tempo, isto é, do campo gravitacional. Todavia, o inverso não é verdadeiro, já que a especificação da curvatura do espaço-tempo pode ser representada por diferentes métricas, em diferentes sistemas de coordenadas (DAS, 2011).

Em um espaço curvo, as relações geométricas derivadas para o espaço euclideano são inválidas. Um exemplo simples é o do transporte paralelo de vetores. Na geometria euclideana, um vetor transportado desta forma, pode ser “copiado” ponto a ponto na superfície plana, até chegar ao destino final, onde ele se mantém paralelo à sua “versão original” (CHENG, 2005). O mesmo não vale para vetores representados na superfície de uma esfera. Na figura 2.1, temos originalmente que o vetor da esquerda com origem no polo norte vai ao equador através de uma certa longitude, apontando para o sul. Movendo-o paralelamente a si mesmo através da longitude e mantendo-o apontando para o sul com mesmo comprimento, ao chegarmos no equador devemos deslocar o vetor movido por um ângulo θ, a fim de termos a origem no polo norte. Assim, ele mantém seu módulo,

Figura 2.1 – Transporte paralelo de um vetor sobre uma esfera.



Fonte: Extraída de (DAS, 2011, p. 84)

além de continuar apontando para o sul, porém, agora ele possui um ângulo θ com o vetor original, ou seja, eles não são mais paralelos (DAS, 2011).

A fim de demonstrar as relações entre o transporte de vetores com a geometria do espaço-tempo associado, isto é, sua métrica, iremos formar uma base de quadrivetores unitários $\{\mathbf{e}^{\mu}\}$ que variam de acordo com as coordenadas, da mesma forma que fazem os vetores base em coordenadas polares ou esféricas. Desta forma, a derivada de um dos vetores da base em relação às coordenadas x^{λ} também é um vetor (FAYYAZUDDIN; RIAZUDDIN; ASLAM, 2015). Além disso, qualquer vetor pode ser expresso em termos dos vetores da base, sendo assim, devemos ter um tensor que conecte esses objetos, tal que (DAS, 2011)[4]

$$\partial_{\mu}\mathbf{e}_{\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\mathbf{e}_{\lambda}\,, \tag{2.15}$$

onde o $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ são os coeficientes afins, também chamados de símbolos de Christoffel, que são determinados pela métrica e suas variações, de tal maneira que (CHENG, 2005)

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\nu}g_{\mu\rho} + \partial_{\mu}g_{\nu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu})\,. \tag{2.16}$$

Levando em consideração as sugestões do matemático Marcel Grossman, ficou claro para Einstein que uma teoria geométrica da gravitação deveria ser escrita em termos do tensor da curvatura de Riemann, um tensor de rank-4 escrito em termos dos símbolos de Christoffel tal que (CHENG, 2005)

$$R^{\mu}_{\lambda\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\lambda\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\lambda\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\lambda\beta} - \Gamma^{\mu}_{\nu\beta}\Gamma^{\nu}_{\lambda\alpha}\,, \tag{2.17}$$

que para um espaço curvo quadridimensional, possui 256 componentes, sendo apenas 10 independentes (devido às propriedades de simetria). A condição necessária e suficiente para que o espaço-tempo em questão seja plano, é a de que o tensor de curvatura Riemann seja nulo (DAS,

[4] Usaremos a definição padrão da literatura, onde $\partial_{\lambda} = \partial/\partial x^{\lambda}$.

2011). Pelas equações (2.16) e (2.17) é possível ver que a métrica e suas variações com relação as coordenadas, determinam completamente a geometria do espaço-tempo.

Entre outras coisas, o princípio da covariância implica que as leis físicas deveriam ser expressas em termos de tensores. A teoria da gravitação deve relacionar a geometria do espaço-tempo (através de algo dependente do tensor de curvatura de Riemann) com a presença de matéria e energia daquela região. A partir do eletromagnetismo na sua forma covariante, é possível obter o tensor energia-*momentum* (DAS, 2011), cujas componentes descrevem, repectivamente, a

T^{00}: densidade de energia local, a qual inclui todas as contribuições de energia e massa;

T^{0i}: taxa do fluxo de energia por unidade de área perpendicular à direção i, dividida por c^2;

T^{ij}: taxa do fluxo da componente i do *momentum* por unidade de área perpendicular à direção j, ou simplesmente, corrente de *momentum*.

Este tensor de rank-2 contém toda a informação sobre a presença de matéria e energia em uma região do espaço-tempo. Em especial, as componentes T^{ij} podem ser associadas com a pressão, o que pode ser visto através de uma simples análise dimensional (CHENG, 2005).

Como energia e *momentum* são grandezas conservadas esperamos que o tensor energia-*momentum* também o seja. Porém, como discutido no caso do transporte paralelo, operadores que dependem das coordenadas se comportam no espaço curvo de forma diferente quando comparados no espaço plano. Desta forma, devemos reinterpretar o conceito de diferenciação ao considerarmos espaços curvos, pois este envolve o cálculo da função em um ponto e em um ponto infinitesimalmente próximo, e a diferença entre estes valores. No espaço curvo, devemos levar em conta a sua curvatura e o transporte paralelo da função entre os pontos. Para um tensor de rank-2 genérico $A^{\mu\nu}$, a derivada covariante é definida como

$$\nabla_\lambda A^{\mu\nu} = \partial_\lambda A^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} A^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\lambda} A^{\mu\rho} \,. \tag{2.18}$$

Vale notar que, quando o espaço for plano os símbolos de Christoffel são nulos, e recaímos no conceito de derivada parcial, válida no espaço plano (FAYYAZUDDIN; RIAZUDDIN; ASLAM, 2015). Dito isto, podemos avaliar as leis de conservação de energia e *momentum*, a partir da conservação do tensor energia-*momentum*, expressa por

$$\nabla_\lambda T^{\mu\nu} = 0 \,. \tag{2.19}$$

Espera-se que a forma covariante das equações de Einstein contenham o tensor energia-*momentum*. Sendo este o caso, o tensor que representa a geometria e a curvatura causadas pela presença de matéria no espaço-tempo, deve ser um tensor de rank-2 e cuja derivada covariante seja nula, pela conservação do tensor energia-*momentum*. Como o tensor de Riemann é um tensor de rank-4, obtém-se a partir dele duas estruturas: o tensor de Ricci $R^{\mu\nu}$ e o escalar de Ricci R. O tensor de Ricci é definido como uma contração de dois índices do tensor de Riemann, sendo escrito como (CHENG, 2005)

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \,. \tag{2.20}$$

O escalar de Ricci é determinado diretamente pelo tensor de Ricci, sendo o resultado do produto deste pela métrica, ou seja (CHENG, 2005),

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \,. \tag{2.21}$$

Podemos definir um novo tensor de rank-2 que compreende as propriedades necessárias, incluindo a de simetria, sendo dado por (DAS, 2011)

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \,, \tag{2.22}$$

que é chamado tensor de Einstein. Este tensor é obtido a partir do tensor de Riemann, desta forma, compreende toda a geometria do espaço-tempo necessária para a descrição do campo gravitacional (FAYYAZUDDIN; RIAZUDDIN; ASLAM, 2015).

Pelos argumentos fornecidos anteriormente, as equações do campo gravitacional de Einstein podem ser escritas como (CHENG, 2005; DAS, 2011; WEINBERG, 2008)

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \,, \tag{2.23}$$

onde G é a constante gravitacional presente na gravitação de Newton. A constante que acompanha o tensor energia-*momentum* é determinada a partir do princípio da consistência, de tal forma que relaciona a gravitação newtoniana com a teoria da relatividade geral para baixas densidades que implicam em campos gravitacionais fracos (FAYYAZUDDIN; RIAZUDDIN; ASLAM, 2015).

2.2 Descrição de uma estrela e sua estabilidade

Uma estrela é definida como sendo uma esfera autogravitante em equilíbrio hidrostático, ou seja, que em sua superfície, a pressão interna que tende a expandir a estrela é igual a pressão gravitacional que tende a comprimi-la, como mostra a figura 2.2. A descrição de uma estrela é feita por um conjunto de três equações: uma equação diferencial que descreve a variação da pressão perante o raio, outra equação diferencial correspondendo à variação da massa com o raio e uma terceira equação correspondente à pressão exercida pelo gás que constitui a estrela, chamada de **equação de estado**, que é obtida a partir da mecânica estatística.

A descrição gravitacional do ponto de vista newtoniano é trivial, iremos realizar esta derivação aqui por uma razão de completeza. A pressão sobre uma superfície esférica e a força são relacionadas simplesmente por

$$\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}F}{4\pi r^2} \,, \tag{2.24}$$

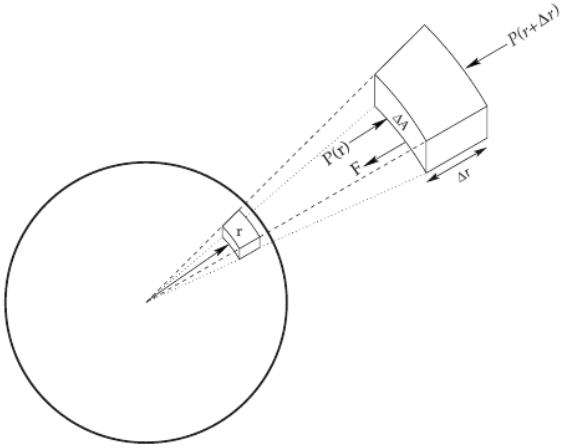
onde p é a pressão. Obtemos o diferencial da força a partir das equações (2.1) e (2.2), de tal forma que

$$\mathrm{d}F = -\frac{G\,\mathrm{d}m\, m(r)}{r^2} \,. \tag{2.25}$$

Por outro lado, o elemento infinitesimal de massa pode ser relacionado com a densidade de massa (como uma função de r), dada por

$$\mathrm{d}m = \rho(r)\mathrm{d}V = \rho(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r \,. \tag{2.26}$$

Figura 2.2 – Ilustração esquemática das pressões atuando sobre um elemento infinitesimal de massa, à uma distância r do centro da estrela.



Fonte: Extraída de (JACKSON *et al.*, 2005, p. 699).

Da teoria da relatividade restrita, temos que a densidade de massa ρ e a densidade de energia ε estão conectas pela velocidade do luz. Em unidades naturais, elas são equivalentes. Substituindo a equação (2.26) em (2.25), e o resultado na equação (2.24) obtemos

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{G\varepsilon(r)m(r)}{r^2}\,, \tag{2.27}$$

que juntamente a

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \varepsilon(r)\,, \tag{2.28}$$

fornecem a descrição gravitacional de uma estrela newtoniana. A figura 2.2 mostra a pressão do gás atuando em um elemento infinitesimal de massa, localizado a uma distância r do centro da estrela, juntamente à força graviacional.

Ao considerarmos o caso relativístico geral, a equação (2.28) é a mesma. Mas a curvatura do espaço-tempo altera a relação entre a pressão e o raio para as estrelas mais densas, que geram um campo gravitacional mais intenso. A solução das equações de Einstein que descreve o comportamento da pressão no interior da estrela é a chamada equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939; TOLMAN, 1939) (cuja derivação está no apêndice B), dada por

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{G\varepsilon(r)m(r)}{r^2}\left[1+\frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right]\left[1+\frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)}\right]\left[1-\frac{2Gm(r)}{r}\right]^{-1}. \tag{2.29}$$

O primeiro termo é idêntico à equação (2.27), enquanto os outros termos podem ser interpretados como correções relativísticas, que fortalecem a ação do campo gravitacional. Vale notar que quando o termo $2GM/R$ (onde M é a massa total da estrela e o R é raio total da estrela) aproxima-se da unidade, os efeitos relativísticos são dominantes (GLENDENNING, 1997) tal que a gravitação newtoniana se torna insuficiente. Esta situação acontece para massas elevadas ou raios pequenos, indicando, de forma geral, altas densidades. De fato, o último termo indica que se $R = 2GM$, o

chamado **raio de Schwarzchild**, atinge-se a singularidade (WEBER, 1999). No caso do Sol, este raio possui valor de aproximadamente 3 km, ou seja, ao comprimirmos a massa do Sol neste raio atingiremos a singularidade, formando um buraco negro.

Para resolver estas duas equações diferenciais acopladas (seja o caso newtoniano ou o caso relativístico), precisamos de uma terceira equação, a chamada equação de estado, que descreve a pressão em termos da densidade de energia e que depende da composição da estrela. Além disso, condições de contorno são necessárias. No ponto central da estrela sabemos que não há massa, portanto $m(r=0)=0$. Não sabemos exatamente a pressão no ponto central, então estipulamos uma pressão para este ponto tal que $p(r=0)=p_0$. Na superfície da estrela, teremos envolvido toda sua massa, implicando em $m(r=R)=M$. Por outro lado, devido ao equilíbrio entre as pressões neste ponto (equilíbrio hidrostático), teremos $p(r=R)=0$ (WEINBERG, 2008).

A condição necessária para que uma estrela seja estável é que a derivada de sua massa total em relação à pressão central seja positiva, já que um aumento na massa (aumento na pressão gravitacional) estará implicando em um aumento da pressão central, representando uma situação de equilíbrio. Caso contrário, o sinal negativo da derivada implica que um aumento da massa vem com uma diminuição da pressão central, logo, a pressão gravitacional será maior, resultando no colapso da estrela. A massa total e a pressão central fazem parte das condições de contorno, sendo que a pressão central é estimada no início dos cálculos pela equação de estado. Enquanto isso, a massa total é obtida ao fim dos cálculos, quando integramos a equação de Newton, ou a equação TOV, perante todo o raio da estrela, satisfazendo a propriedade de que na superfície da estrela a pressão é nula, devido ao equilíbrio hidrostático.

2.3 Evolução estelar

Estrelas se formam a partir de uma nuvem interestelar de poeira e gás, composta principalmente por hidrogênio. Esta nuvem é contraída pela ação do campo gravitacional gerado por sua própria massa. Durante a contração, a energia potencial gravitacional é transformada em energia térmica do gás e em radiação, aumentando a densidade e a pressão próximas ao centro da nuvem. Este aumento da pressão central desacelera a contração, porém, as partes externas continuam caindo livremente. Neste estágio, o denso centro da nuvem pode ser considerado uma protoestrela (CARROLL; OSTLIE, 2007; KARTTUNEN *et al.*, 2007).

Esta protoestrela é composta dominantemente por moléculas de hidrogênio, que ao atingirem temperaturas[5] próximas a 1800 K, são convertidas em átomos de hidrogênio. A dissociação das moléculas em átomos consome energia, diminuindo a taxa de crescimento da temperatura e da pressão, o que aumenta a taxa de contração. A mesma sequência é repetida, primeiramente quando o hidrogênio é ionizado em temperaturas da ordem de 10^4 K e posteriormente, quando os átomos de hélio são ionizados. Em aproximadamente 10^5 K, o gás está completamente ionizado (KARTTUNEN *et al.*, 2007). A contração da protoestrela cessa apenas quando uma grande porção do gás é ionizada

[5] Em unidades naturais, a temperatura é escita em unidades de energia. Porém, durante a evolução estelar é mais conveniente utilizarmos a unidade Kelvin.

na forma de um plasma, fazendo a protoestrela atingir o equilíbrio hidrostático. Até chegarmos neste ponto, o raio da protoestrela foi de 100 ua para 1/4 ua (CARROLL; OSTLIE, 2007), onde $1\,\text{ua} \simeq 1{,}5 \times 10^8$ km é a distância entre a Terra e o Sol.

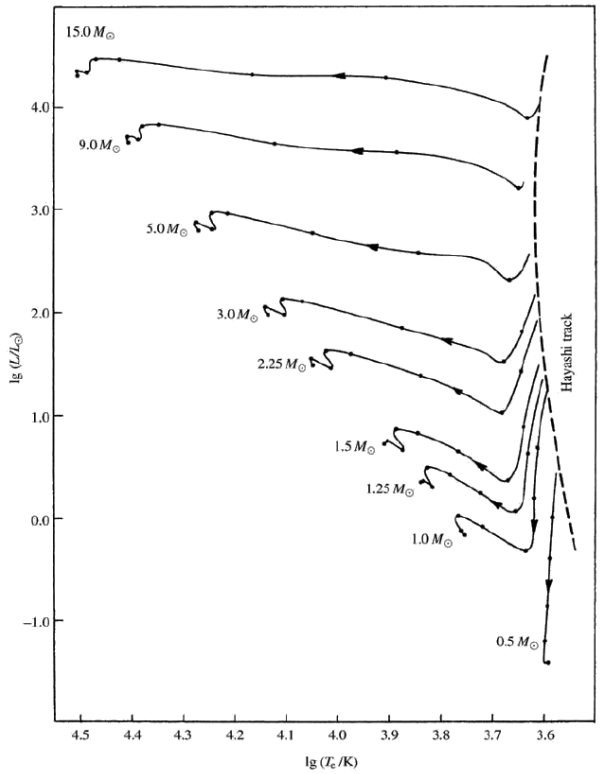
A protoestrela se mantém dentro da nuvem de poeira e gás, e continua a acrescentar massa dos arredores. Este processo, chamado de acreção, aumenta não só a massa mas também a temperatura e a densidade central da protoestrela. A temperatura de uma protoestrela que acabou de atingir o equilíbrio é baixa, e esta é correspondentemente opaca. A transferência de energia no centro da protoestrela é feita via convecção, isto é, através do movimento do material no interior da protoestrela. Este transporte de energia é eficiente, tornando a superfície relativamente brilhosa (KARTTUNEN *et al.*, 2007). O raio e a luminosidade continuarão a decrescer, gerando um aumento da temperatura no centro da protoestrela e uma diminuição da sua opacidade, o que caracteriza o começo do transporte de energia através de radiação. A massa da região radioativa crescerá gradualmente até que grande parte da protoestrela torne-se radioativa. Neste ponto, com uma massa de aproximadamente 0,08 $M_\odot$, a temperatura será da ordem de 4×10^6 K dando início às reações nucleares, que fornecem crescente contribuição à pressão térmica, aumentando a luminosidade do objeto (CARROLL; OSTLIE, 2007; GLENDENNING, 1997).

Para uma estrela com massa similar a do Sol, o colapso da protoestrela acontece em poucas centenas de anos (KARTTUNEN *et al.*, 2007). A queima de hidrogênio marca o início da sequência principal, assim como o início da vida de uma estrela (GLENDENNING, 1997; PINOCHET; JAN, 2016). O que caracteriza a sequência principal é o equilíbrio estável da estrela, cuja única fonte de energia é a fusão de hidrogênio em hélio. Podemos analisar a evolução da protoestrela até a chegada da sequência principal pelo diagrama Hertzprung-Russel (HR) (LONGAIR, 2011), mostrado na figura 2.3, que relaciona a luminosidade com a temperatura[6]. Neste diagrama, a protoestrela parte da linha Hayashi, que estabelece o limite para uma estrela estável, ou seja, estrelas à direita da linha Hayashi são instáveis (CARROLL; OSTLIE, 2007); e segue em direção à sequência principal com aumento na temperatura superficial se estabelecendo com uma massa bem definida (KARTTUNEN *et al.*, 2007). A única alteração que ocorre na estrela é a de sua composição química, devido às reações nucleares. Para o Sol, a sequência principal é de aproximadamente 10 bilhões de anos. Para estrelas menos massivos, a sequência principal se prolonga ainda mais, enquanto que para as mais massivas essa fase é mais curta (KARTTUNEN *et al.*, 2007).

Existe um limite na acreção de massa, já que para massas demasiado elevadas a pressão gravitacional não consegue contrapor a radiação. Estrelas mais massivas que este limite não conseguem se formar (KARTTUNEN *et al.*, 2007; PINOCHET; JAN, 2017). Na teoria vigente, a massa máxima está em um intervalo de 40 $M_\odot$ e 440 $M_\odot$. Porém, a estrela R136a1, a mais massiva já observada, possui uma massa de aproximadamente 265 $M_\odot$ (CROWTHER *et al.*, 2010). Além disso, devido aos ventos solares (ejeção constante de partículas), estrelas muito massivas perdem massa rapidamente. Estimativas sugerem que a massa da estrela R136a1, na sua formação, fosse de aproximadamente 320 $M_\odot$ (CROWTHER *et al.*, 2010; KROUPA; WEIDNER, 2005; PINOCHET;

[6] Alguns autores sugerem o nome diagrama HR 'teórico', pois as variáveis luminosidade e temperatura efetiva não são obtidas diretamente das observações (LONGAIR, 2011).

Figura 2.3 – Diagrama HR para a evolução das protoestrelas até a chegada na sequência principal, para diferentes massas.



Fonte: Adaptada de (IBEN, 1965, p. 1010).

JAN, 2017).

Existe também um limite inferior de massa, o qual é bem estabelecido, já que estrelas com massas inferiores a 0,08 $M_\odot$ não esquentam o suficiente para realizar a combinação de núcleos de hidrogênio em hélio (PINOCHET; JAN, 2017). Estrelas que não são capazes de realizar este processo, conseguem uma pequena luminosidade a partir da queima de deutério, que rapidamente se esgota. Esses objetos são conhecidos como anãs marrons. Suas temperaturas superficiais estão entre 1000 K e 2000 K. Se a acreção de massa não superar 0,015 $M_\odot$, a estrela não é capaz de queimar deutério, portanto, não possui nenhum tipo de combustível nuclear, e são chamadas de estrelas apenas por serem formadas a partir do colapso gravitacional (CARROLL; OSTLIE, 2007; KARTTUNEN *et al.*, 2007).

Nas estrelas menos massivas, com massas inferiores a 0,26 $M_\odot$, o transporte de energia é convectivo em toda a estrela, o que implica que todo o hidrogênio está disponível como combustível durante a sequência principal. A evolução dessas estrelas é muito simples. Após a queima de hidrogênio elas contraem, formando uma anã branca composta majoritariamente por hélio (CARROLL; OSTLIE, 2007). Todavia, estrelas cuja as massas estão entre 0,26 $M_\odot$ e 1,5 $M_\odot$, possuem núcleo radioativo, porém o envelope é convectivo, já que as temperaturas das camadas externas é mais baixa. Como não há mistura de materiais no núcleo, o hidrogênio é queimado no centro, aumentando a abundância de hélio nas camadas externas. A estrela se torna mais quente e brilhante, apesar

de não ocorrerem alterações consideráveis no seu raio. Eventualmente, o núcleo é composto dominantemente por hélio, porém, a queima de hidrogênio continua em uma camada espessa ao redor do núcleo (KARTTUNEN *et al.*, 2007).

Estrelas com massa superior a 1,5 $M_\odot$ possuem uma transferência de energia convectiva no núcleo, misturando os elementos que o formam, diminuindo a abundância de hidrogênio uniformemente com o tempo na região central. A energia é transportada de forma radioativa, porém, sem reações nucleares no envelope (TAYLER, 1994). Entre o núcleo e o envelope existe uma região de transição, onde a abundância de hidrogênio diminui nas regiões mais próximas ao núcleo. A massa do núcleo convectivo diminui enquanto o hidrogênio é consumido. A exaustão de hidrogênio no núcleo leva a uma contração rápida do mesmo, aumentando a temperatura do hidrogênio na camada imediatamente externa a esse. Rapidamente, a temperatura se torna alta o suficiente para reiniciar a queima de hidrogênio (CARROLL; OSTLIE, 2007; KARTTUNEN *et al.*, 2007).

A sequência principal acaba quando todo o hidrogênio é convertido em hélio, no centro da estrela. Assim, inicia a queima de camadas de hidrogênio que envolvem o núcleo composto por hélio, aumentando sua massa. Este evento leva ao aumento do envelope convectivo da estrela, aumentando seu raio e luminosidade, levando a estrela a uma fase que conhecemos como gigante vermelha (CARROLL; OSTLIE, 2007).

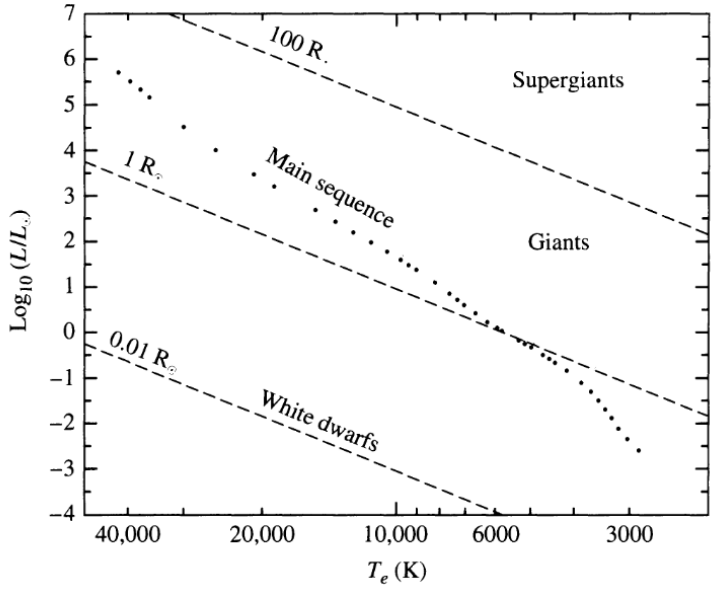
Em estrelas pouco massivas ($M \leq$ 2,3 $M_\odot$), com crescimento da massa do núcleo a densidade cresce, e este torna-se degenerado. Se a massa da estrela for maior que 0,26 $M_\odot$ a temperatura atingirá valores da ordem de 10^8 K, sendo suficientemente alta para realizar a queima de hélio em carbono, através do processo alfa triplo[7] (KARTTUNEN *et al.*, 2007). Ao contrário de um gás normal, o núcleo degenerado não é capaz de expandir, mesmo com o aumento da temperatura. Este progressivo aumento na temperatura leva a uma aceleração das reações nucleares, até que o núcleo não esteja degenerado e exploda violentamente, no chamado flash de hélio. A energia liberada pelo flash de hélio é absorvida pelas camadas externas, e não leva a uma ruptura da estrela. De fato, hélio continua a ser fundido gradualmente em carbono, em um núcleo não degenerado (CARROLL; OSTLIE, 2007). A configuração atingida neste ponto é estável.

Em estrelas com massas entre 2,3 $M_\odot$ e 8 $M_\odot$, a temperatura central é mais alta, porém, a densidade é menor, e o núcleo não é degenerado. Neste caso, a queima de hélio não é catastrófica, conforme a região central contrai. Eventualmente, o hélio esgota no núcleo e continua queimando em uma camada concêntrica, enquanto a casca de hidrogênio é apagada. Quando a camada de hélio encontra a casca apagada de hidrogênio, a estrela entra na chamada fase de pulsação térmica, onde hidrogênio e hélio queimam alternadamente. Esta configuração é instável e a fase de pulsação térmica só termina quando a pressão de radiação ejeta as camadas externas da estrela, formando uma nebulosa planetária. De maneira geral, estrelas com massa inferior a 8 $M_\odot$ nunca atingem temperaturas suficientemente altas para realizar a queima de oxigênio no núcleo. Este núcleo permanece em meio à nebulosa planetária, composto dominantemente por carbono e oxigênio, na forma de uma anã branca (GLENDENNING, 1997; JACKSON *et al.*, 2005; KARTTUNEN *et al.*, 2007).

---

7 ^{4}He$+^4$He $\leftrightarrow^8$Be
^{8}Be $+^4$He $\leftrightarrow^{12}$C

Figura 2.4 – Diagrama HR representando as estrelas luminosas observáveis, catalogando-as pelo logarítimo de sua luminosidade em função de sua temperatura efetiva. Este diagrama pode ser separado em três seções: do canto esquerdo inferior até o canto direito superior (em diagonal) temos, respectivamente, as anãs brancas, as estrelas que se encontram na sequência principal (onde está o Sol), acima destas as gigantes vermelhas e, por último, as supergigantes. As linhas tracejadas em diagonal representam raio constante e os pontos são provenientes de observações.



Fonte: Adaptada de (CARROLL; OSTLIE, 2007, p. 223).

Até este ponto, somos capazes de catalogar as estrelas discutidas no diagrama HR, que pode ser visto na figura 2.4. O aspecto mais importante deste diagrama, é que tanto luminosidade quanto temperatura superficial são funções da massa da estrela, desta forma, as estrelas mais luminosas são as mais massivas e com maiores temperaturas superficiais. O diagrama HR contém estrelas supermassivas somente durante a sequência principal, pois seus objetos remanescentes emitem radiação somente na faixa do rádio, como discutiremos posteriormente. Por outro lado, as anãs brancas, que são o ponto final das estrelas menos massivas, se apresentam com baixa luminosidade no canto inferior esquerdo. O estágio intermediário entre uma estrela como o Sol (mais precisamente, com massa inferior a 1,5 $M_\odot$) e uma anã branca, chamado de gigante vermelha, se situa do lado direito da faixa intermediária, um pouco acima da sequência principal. Enquanto isso, o estágio intermediário entre uma estrela com massa inferior a 8 $M_\odot$ e uma anã branca está demonstrado na região das supergigantes, localizada no canto superior direito.

Em estrelas com massas próximas a 10 $M_\odot$, ocorre a queima explosiva de carbono e oxigênio, assim como ocorre com o hélio em estrelas pouco massivas, resultando em um flash de carbono ou oxigênio. Isto ocorre de maneira muito mais intensa do que o flash de hélio, e a estrela pode explodir na forma de uma supernova (KARTTUNEN *et al.*, 2007).

Para estrelas ainda mais massivas, o núcleo permanece não degenerado e a queima de

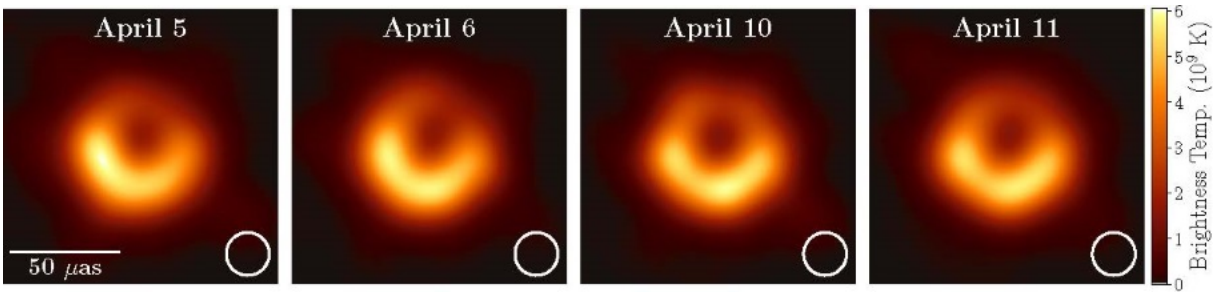
elementos não é catastrófica durante a sua contração e aquecimento. Em um primeiro estágio, ocorre a queima de carbono durante alguns milhares de anos. Posteriormente, a queima de oxigênio ocorre em um ano, e a de silício em apenas uma semana (GLENDENNING, 1997). A cada elemento esgotado no centro, a queima continua em uma casca concêntrica. Ao final, a estrela consistirá de uma sequência de camadas de diferentes composições, e se essa estrela possuir massa superior a 15 $M_\odot$, chegará até um núcleo de ferro (KARTTUNEN *et al.*, 2007). Isto caracteriza a transição de um processo exotérmico para um endotérmico. Além disso, o fim da queima de elementos determina o fim da parte luminosa na vida de uma estrela. Entretanto, este estado não é estável, já que a falta da queima de elementos reduzirá a pressão central, tornando inevitável o colapso gravitacional. Parte da energia liberada no colapso dissocia os núcleos de ferro, primeiramente em núcleos de hélio e posteriormente em prótons e nêutrons. A partir deste ponto, o colapso se torna ainda mais rápido e ocorre em uma fração de segundo. As partes externas também colapsam, mais lentamente, pois ainda existem elementos a serem queimados em algumas regiões. Isto ocorre de maneira explosiva, liberando enormes quantidades de energia, principalmente na forma de neutrinos (CARROLL; OSTLIE, 2007; KARTTUNEN *et al.*, 2007). Podemos resumir os estágios finais da vida de uma estrela como uma implosão do núcleo, que brevemente cessa cada vez que um novo elemento está disponível para a fusão.

A expansão do envelope de estrelas com massa superior a 8 $M_\odot$ e com um denso núcleo de ferro, formam o que chamamos de supergigante vermelha, com raio da ordem de 10^8 km (GLENDENNING, 1997). No denso núcleo, torna-se energeticamente mais favorável para que prótons capturem elétrons, formando nêutrons e neutrinos, no que chamamos de processo beta inverso (GLENDENNING, 1997; JACKSON *et al.*, 2005). O núcleo começa, então, uma implosão, elevando a temperatura para aproximadamente 10^{11} K, em momentos próximos ao fim do colapso. Ao passar a massa de Chandrasekhar ($M_{\rm Ch} \simeq 1{,}45\ M_\odot$), a pressão de degenerescência dos elétrons não será mais capaz de sustentar a pressão gravitacional, levando a um colapso catastrófico das camadas externas, isto é, uma supernova. O núcleo será composto majoritariamente por nêutrons, que se tornam degenerados devido às elevadas densidades. A pressão de degenerescência evita o colapso de um núcleo de pouca massa, chamado de estrela de nêutrons (KARTTUNEN *et al.*, 2007; NYÍRI, 2001). Entretanto, se a massa do núcleo for maior do que a massa limite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, um buraco negro provavelmente será formado (CARROLL; OSTLIE, 2007; KARTTUNEN *et al.*, 2007).

2.4 Objetos compactos

Nesta seção trataremos especificamente dos três tipos de objetos compactos. Apresentaremos brevemente os conceitos pertinentes à buracos negros. Uma discussão mais aprofundada será feita em torno das anãs brancas, pois estas possuem propriedades únicas. Por fim, abrangiremos as estrelas de nêutrons, cuja constituição permanece um tema de intenso debate.

Figura 2.5 – Primeiras imagens já feitas de um buraco negro, reconstruída a partir de dados do EHT.



Fonte: Extraída de (The EHT Collaboration *et al.*, 2019).

2.4.1 Buracos negros – uma sinopse

Buracos negros são os objetos mais densos presente no Universo observável. Suas elevadas densidades tornam impossível que até mesmo a luz escape de seus efeitos gravitacionais, e como nada pode se mover mais rápido que a luz, nada pode escapar do interior de um buraco negro (GLENDENNING, 1997). Desta forma, um buraco negro é definido como sendo uma região do espaço-tempo que não se comunica com o Universo. O limite desta região é a superfície do buraco negro, chamada de horizonte de eventos (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2004).

Um buraco negro exerce a mesma força em um objeto distante que qualquer objeto com a mesma massa o faria. Se comprimíssemos a massa do Sol em um raio de 3 km, formando um buraco negro, a Terra não sairia de órbita (CAMENZIND, 2007). Entretanto, objetos próximos de um buraco negro são despedaçados, e tornam-se parte do que é chamado disco de acreção. Este disco gira em torno do horizonte de eventos enquanto parte da matéria é engolida. O destino da matéria que cruza o horizonte de eventos é incerto (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2004).

Neste ano a colaboração do *Event Horizon Telescope* (EHT), obteve a primeira imagem (figura 2.5) de um buraco negro, ou melhor dizendo, do disco de acreção deste objeto. O buraco negro "fotografado" chama-se M87, fica localizado no centro da galáxia Messier 87, à aproximadamente 55 milhões de anos-luz da Terra e com uma massa estimada em 6,5 bilhões de massas solares (The EHT Collaboration *et al.*, 2019).

2.4.2 Anãs brancas

Em 1844, Bessel observou que o sistema Sirius, o mais brilhante do céu noturno visível a olho nu, é um sistema binário, composto por uma estrela luminosa, chamada Sirius A, e uma companheira com baixa luminosidade, chamada atualmente de Sirius B, que foi observada por Alvan Graham Clark, em 1862. Clark também foi capaz de estimar as massas e as respectivas luminosidades das estrelas do sistema Sirius, determinando que a massa da Sirius A é aproximadamente 2,3 $M_\odot$ com luminosidade de 23,5 $L_\odot$, enquanto a massa da Sirius B é um pouco maior do que a massa do Sol (1,053 $M_\odot$) e sua baixa luminosidade é de aproximadamente 0,03 $L_\odot$ (SHAPIRO; TEUKOLSKY, 2004). Apesar da luminosidade fraca de Sirius B, sua temperatura superficial excede a temperatura de sua estrela companheira, com valores respectivos de 27 000 K e 9160 K (CARROLL; OSTLIE,

2007). Por conta disto, Sirius B é uma estrela quente, com uma cor branco-azulado. Pela Lei de Stefan-Boltzmann, o raio desta estrela foi estimado em $5{,}5 \times 10^6$ m $\simeq 0{,}008\,\mathrm{R}_\odot$, o que significa que este objeto possui a massa do Sol confinada em um raio menor que o da Terra (CARROLL; OSTLIE, 2007)! A alta densidade de Sirius B foi confirmada em 1925, pela medição do *redshift* gravitacional das suas linhas espectrais, uma das primeiras observações que serviram como validação da teoria da Relatividade Geral proposta por Einstein (KARTTUNEN *et al.*, 2007). Hoje, chamamos estrelas como a Sirius B pelo nome de anãs brancas.

Devido à elevada densidade presente nas anãs brancas, ficou claro que a pressão de radiação não era capaz de sustentar o colapso gravitacional. Em 1926, Fowler usou a recentemente descoberta estatística de Fermi-Dirac para explicar a sustentação de uma anã branca (FOWLER, 1926). Fowler descreveu o gás que constitui uma anã branca como um gás de elétrons degenerados, que exercem a chamada pressão de degenerescência, que contrapõe a pressão gravitacional (JACKSON *et al.*, 2005). Essa pressão de degenerescência é consequência direta do princípio da exclusão de Pauli, onde dois férmions não podem ocupar o mesmo estado quântico simultaneamente (CARROLL; OSTLIE, 2007). No caso dos elétrons, a descrição do estado quântico é feita pelo *spin* (*up* ou *down*) e pela energia. Desta forma, um gás degenerado possui pelo menos dois elétrons em cada nível de energia, ou seja, cada elétron com a mesma energia possui o *spin* diferente do outro.

Pela definição da pressão de degenerescência e pela teoria da relatividade restrita, fica claro que deve haver uma massa limite que os elétrons sejam capazes de suportar. Pela relatividade restrita, a velocidade da luz é a velocidade limite que as partículas do gás podem possuir. Juntamente a este conceito, Chandrasekhar utilizou os conceitos do gás degenerado de elétrons, como feito anteriormente por seu orientador Fowler, descobrindo, assim, que a massa limite de uma anã branca era dada por (CHANDRASEKHAR, 1931)

$$M_{\mathrm{Ch}} = 1{,}4312 \left(\frac{2Z}{A}\right)^2 \mathrm{M}_\odot \ ,$$

onde A é o número de núcleons e Z o número de prótons. Em sua homenagem, a massa limite é chamada de massa de Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR, 1931; PINOCHET; JAN, 2016; SAGERT *et al.*, 2006). É possível visualizar que o aumento incondicional da pressão gravitacional (aumento da massa da estrela) não pode ser sempre sustentado por elétrons. A partir de M_{Ch}, os elétrons não são mais capazes de suportar o colapso gravitacional, e outras partículas, como nêutrons e/ou quarks, devem desempenhar tal papel (GLENDENNING, 1997).

Como a massa dos elétrons é muito menor que a dos núcleons, eles são os primeiros a se tornarem degenerados, tornando a pressão dos íons e a de radiação negligenciáveis (KARTTUNEN *et al.*, 2007; SAGERT *et al.*, 2006). Além disso, não há fonte de energia no interior de uma anã branca, a pressão de degenerescência apenas fornece resistência ao colapso gravitacional. Como consequência, o transporte de energia no interior dessa estrela se dá pela condutividade térmica dos elétrons. Isto é tão eficiente que o interior de uma anã branca é praticamente isotérmico, com queda na temperatura significativa apenas nas regiões externas não degeneradas (CARROLL; OSTLIE, 2007). Estas camadas externas radiam o calor restante, resfriando a anã branca lentamente,

resultando em mudanças de cor da superfície, passando de branco para vermelho até se tornar um corpo negro. Conforme a anã branca esfria, o gás de elétrons vai se tornando cada vez mais degenerado (TAYLER, 1994). O tempo de resfriamento de uma anã branca é comparável com a idade do Universo, e as anãs brancas de brilho mais fraco servem como limites inferiores à idade do Universo (KARTTUNEN *et al.*, 2007).

A derivação das equações de estado para um gás ideal de Fermi degenerado, pela estatística de Fermi-Dirac, está demonstrada de forma detalhada no apêndice C. Aqui, apresentaremos apenas as equações de estado, no caso específico de um gás de elétrons completamente degenerado.

Por serem 2000 vezes menos massivos que os núcleons, desprezaremos as contribuições dos elétrons para a massa, porém, eles fornecerão toda a pressão de degenerescência do gás, já que são as primeiras partículas a se tornarem degeneradas. Isto significa que também aproximaremos os núcleons como estando em repouso, contribuindo para a densidade de energia somente através de sua energia de repouso, sem contribuir para a pressão do gás. Outra aproximação que levaremos em conta, é a de que o gás se encontra em temperatura nula, o que é válido quando $(\mu - m_e) \gg T$, onde μ é o potencial químico, m_e a massa do elétron e T a temperatura, assim, o gás está completamente degenerado. Desta forma, segue que a pressão, a densidade de energia e a densidade de partículas são, respectivamente, dadas por

$$p(x) = \frac{m_e^4}{24\pi^2}[(2x^3 - 3x)(1+x^2)^{1/2} + 3\,\mathrm{senh}^{-1}x]\,, \tag{2.30}$$

$$\varepsilon(x) = n m_N \frac{A}{Z} + \frac{m_e^4}{8\pi^2}[(2x^3 + x)(1+x^2)^{1/2} - \mathrm{senh}^{-1}x]\,, \tag{2.31}$$

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}\,, \tag{2.32}$$

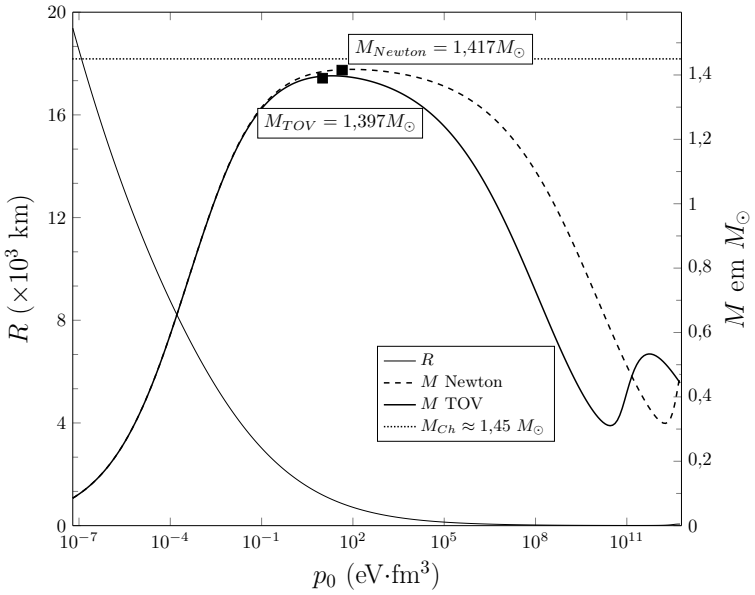
onde $x = k_F/m_e$ e

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2\rho}{m_N}\frac{Z}{A}\right)^{1/3} \tag{2.33}$$

é o momento de Fermi, valor limite do *momentum* que os elétrons podem possuir. Além disso, ρ é a densidade de massa, m_N é a massa de um núcleon. Portanto, no caso de uma anã branca composta por ^{12}C e ^{16}O, $Z/A = 1/2$.

Anãs brancas são o único tipo de objeto compacto que pode ser tratado via gravitação newtoniana. Para uma anã branca típica com $M = 0{,}8\mathrm{M}_\odot$ e $R = 7000$ km, temos que $2GM/R \simeq 3 \times 10^{-4}$, o que é muito menor do que a unidade, sendo assim, a aproximação newtoniana permanece válida. Porém, esta validade se estende até certo ponto. Para as anãs brancas mais densas, deve empregar-se a relatividade geral (SAGERT *et al.*, 2006), o que pode ser visto na figura 2.6. Para obter estes resultados fizemos uso da equação de estado (2.30), além da equação da massa, leia-se equação (4.2), juntamente à descrição da pressão via gravitação newtoniana – equação (2.27) – e via relatividade geral, pela Equação TOV (2.29), a fim de comparmos os dois resultados. Na figura 2.6, pode-se observar que o tratamento newtoniano das anãs brancas é válido para toda a região onde $0{,}1\,\mathrm{M}_\odot \leq M \leq 1{,}4\,\mathrm{M}_\odot$, implicando em 20 000 km $\geq R \geq$ 1000 km. Esta análise mostra, também, que a massa máxima da anã branca é menor no caso relativístico do que no caso newtoniano. Isto ocorre

Figura 2.6 – Relações massa-pressão central e raio-pressão central de uma estrela anã branca, sustentada pela pressão de degenerescência dos elétrons. Vale notar que este sistema é (a princípio) aceitável fisicamente, já que respeita a massa de Chandrasekhar.



Fonte: o autor (2019)

devido aos termos adicionais da equação TOV, que fortalecem a intensidade do campo gravitacional, gerando para uma mesma massa um campo mais intenso do que aquela da gravitação de Newton. Além disso, pode-se observar que as soluções obtidas respeitam a massa de Chandrasekhar M_{Ch}.

A partir da figura 2.6, também é possível analisar a estabilidade da estrela, através do sinal da derivada da sua massa total M em relação à pressão central p_0. A região de estabilidade da estrela deve satisfazer a relação $dM/dp_0 > 0$, pois, se houver um incremento de sua massa e o mesmo ocorrer com a pressão central, o equilíbrio entre a pressão gravitacional e a pressão de degenerescência é mantido (SAGERT *et al.*, 2006). Por outro lado, se houver um incremento na massa da estrela, e a pressão central não se alterar, ou até mesmo, diminuir, a ação gravitacional levará ao colapso da estrela. Portanto, da figura 2.6, temos duas regiões de estabilidade: a primeira para os valores aproximados de pressão central entre 10^{-7} eV/fm$^3 \leq p_0 \leq 10$ eV/fm^3, onde a massa varia aproximadamente entre 0,1 M$_\odot \leq M \leq$ 1,4 M$_\odot$; a segunda, corresponde ao intervalo de pressões centrais entre 10^{10} eV/fm$^3 \leq p_0 \leq 10^{12}$ eV/fm^3, e de pequenas massas entre 0,31 M$_\odot$ $\leq M \leq$ 0,55 M$_\odot$. A primeira região de estabilidade pode ser (e usualmente é) tratada via gravitação newtoniana em ótima aproximação. No segundo caso, a gravitação newtoniana leva a valores não aceitáveis e a teoria da relatividade geral deve ser empregada (SAGERT *et al.*, 2006).

2.4.3 Estrelas de nêutrons

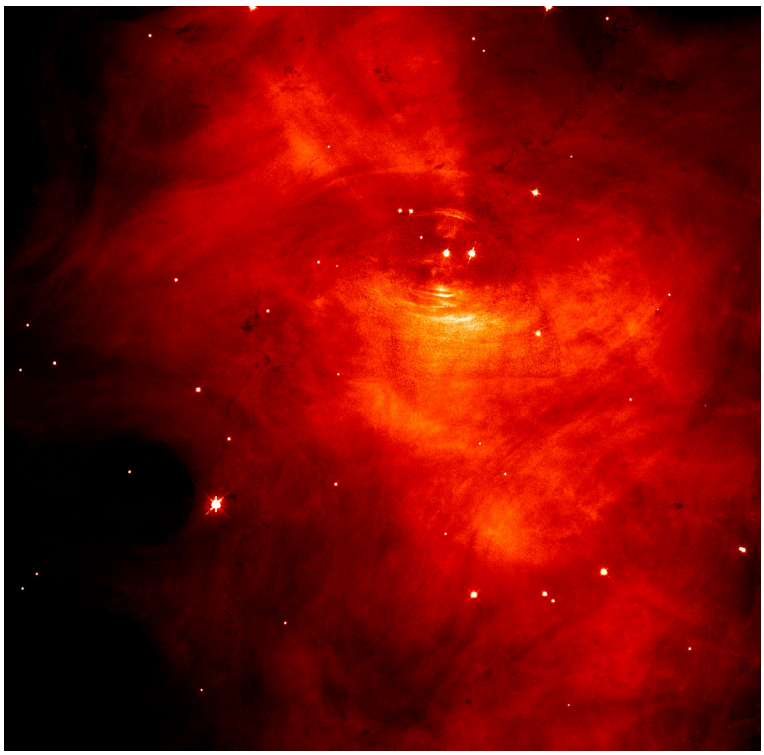
A descoberta do nêutron por Chadwick em 1932, levou Baade e Zwicky a proporem, dois anos depois, que uma estrela remanescente de uma supernova poderia ser sustentada pela pressão

de degenerescência dos nêutrons, isto é, uma estrela de nêutrons (BAADE; ZWICKY, 1934). Nos anos seguintes, estes objetos foram alvo de intenso estudo. Em 1939, Tolman, Oppenheimer e Volkoff realizaram os primeiros cálculos com relação às estrelas de nêutrons (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939; TOLMAN, 1939). Eles estimaram que o raio típico destes objetos seria de apenas 10 km. Além disto, neste estudo sobre estrelas de nêutrons, a partir das equações de campo de Einstein, Volkoff, sob a orientação de Oppenheimer e utilizando o livro de Tolman, deduziu a notável equação TOV (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939; TOLMAN, 1939). Anos depois, Woltjer estimou que a conservação do fluxo magnético de uma gigante vermelha que é contraída gravitacionalmente em uma estrela de nêutrons, poderia produzir campos magnéticos da ordem 10^{12} G (WOLTJER, 1964)! Por conta do seu pequeno raio, a luminosidade das estrelas de nêutrons foi estimada em valores muito baixos, sendo considerado na época, impossível de serem detectadas. Isto fez com que o assunto fosse esquecido por mais de vinte anos.

Com telescópios de melhor resolução, em 1967, Burnett e outros detectaram uma fonte que emitia ondas de rádio com intervalos frequentes e constantes (CAMENZIND, 2007). As observações seguintes deste tipo de objeto, nomeado pulsar, deixou claro aos astrônomos da época que este tipo de estrela possui um forte campo magnético e que, além da emissão de sinais de rádio, também poderia emitir na frequência de raios-X (CAMENZIND, 2007). Até hoje, milhares de pulsares foram detectados, tanto em sistemas isolados quanto em sistemas binários. Um dos exemplos mais famosos, é o pulsar que se encontra no centro da nebulosa do Caranguejo (WEBER, 1999), e que pode ser visto na figura 2.7, sendo chamado de pulsar do Caranguejo. Este é o objeto remanescente da supernova que fora detectada por astrônomos chineses em meados de 1054. Na observação do céu na frequência de rádio, o pulsar do Caranguejo se sobressai, emitindo 33 pulsos de rádio a cada segundo. Além disso, este pulsar emite também na frenquência de raio-X (WEBER, 1999). Recentemente, observou-se o pulsar mais massivo já encontrado, o MSP J0740+6620 com massa aproximadamente igual a 2,14 $M_\odot$ (CROMARTIE *et al.*, 2019). Esta descoberta foi feita com a combinação de dados do North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves com observações do telescópio Green Bank, utilizando-se a propriedade chamada atraso relativístico de Shapiro, que basicamente descreve o atraso com que os sinais emitidos pelo pulsar em um sistema binário são recebidos, quando o pulso é “atrasado” pela estrela companheira (SHAPIRO, 1964).

Pelas observações realizadas, estava claro que um pulsar deveria ser uma estrela compacta, sendo que o único tipo observado até então, eram as anãs brancas (WEBER, 1999). Em 1968, Gold propôs que os pulsares detectados seriam estrelas de nêutrons girando rapidamente, com elevados campos magnéticos (GOLD, 1968). Dentro da explicação de Gold para associar um pulsar a uma estrela de nêutrons, deve-se interpretar que a pulsação de um pulsar é causada pelo período de rotação, e não por sua vibração (GLENDENNING, 1997). Ele argumentou que a vasta quantidade de energia radiada, juntamente à enorme quantidade de energia rotacional armazenada em um objeto de aproximadamente 10 km e com um fluxo magnético tão grande, ambos conservados da estrela progenitora, sugerem que tal objeto girando rapidamente poderia explicar um período estável de emissão de sinais, como aqueles observados. Além destes argumentos, a detecção de pulsares via radiação eletromagnética implica que estes objetos estão perdendo energia. Desta forma, a amplitude

Figura 2.7 – Pulsar do Caranguejo (à esquerda, perto do centro da imagem) localizado no centro da nebulosa do Caranguejo, resultado da supernova observada em 1054.



Fonte: Extraída de (ESA/Hubble, 1996).

de vibração diminui com o passar do tempo, o que não afeta a frequência observada. No caso da rotação associada à frequência de emissão, esta é amortecida suavemente o que acarreta em uma mudança acumulada no período de rotação, de três segundos em 10^8 anos (GLENDENNING, 1997), estando de acordo com os resultados observacionais. Neste cenário, pulsares emitem partículas, com velocidades próximas a da luz, a uma taxa constante, a partir de seus polos magnéticos. Uma analogia útil no seu entendimento, são os faróis marítimos. De tal forma, que os jatos de partículas emitidos por pulsares varrem a Terra, e agem como a luz emitida pelo farol girante sobre um barco (CAMENZIND, 2007).

A explicação para que uma gigante vermelha se torne uma estrela de nêutrons tem seu embasamento na seção 2.3. Estrelas massivas ($> 8\ M_\odot$) expelem grandes quantidades de energia ao espaço interestelar, na forma de uma supernova. Antes disso, enquanto o núcleo de ferro da estrela original continua a contrair, os elétrons tornam-se relativísticos. Neste ponto, a estrela se assemelha à uma anã branca, porém, contém elementos químicos mais pesados. Como a massa da estrela era, originalmente, tão elevada, a massa do núcleo de ferro será maior que a massa de Chandrasekhar, implicando que os elétrons não são mais capazes de suportar o colapso gravitacional. As altas energias cinéticas dos elétrons faz com que seja eletricamente favorável que ocorra o decaimento beta inverso, isto é, que prótons e elétrons combinem-se, formando nêutrons e neutrinos. Os neutrinos escapam da estrela, levando parte da energia gravitacional, mas com a densidade crescente, alguns ficam presos. O denso objeto que acreditava-se ser composto, em grandes

quantidades, por nêutrons, chama-se estrela de nêutrons. Nos trabalhos de Oppenheimer e Volkoff foi estimado, com uma equação de estado similar à equação (2.30) e dada por (SAGERT *et al.*, 2006)

$$p(x) = \frac{m_N^4}{24\pi^2}[(2x^3 - 3x)(1+x^2)^{1/2} + 3\,\mathrm{senh}^{-1}x]\,, \tag{2.34}$$

$$\varepsilon(x) = n\,m_N + \frac{m_N^4}{8\pi^2}[(2x^3 + x)(1+x^2)^{1/2} - \mathrm{senh}^{-1}x]\,, \tag{2.35}$$

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2}\,, \tag{2.36}$$

onde $x = k_F/m_N$ e

$$k_F = \left(\frac{3\pi^2\rho}{m_N}\right)^{1/3}$$

é o momento de Fermi; que um gás de nêutrons livres não seria capaz de sustentar estrelas com massas superiores a 0,7 $M_\odot$. Desta forma, ficou claro que estrelas de nêutrons são compostas por outras partículas, além de nêutrons (CARROLL; OSTLIE, 2007).

Hoje, as evidências sugerem que possamos dividir uma estrela de nêutrons em quatro camadas. A camada mais externa é chamada de atmosfera, possui poucos centímetros e é composta por átomos de hidrogênio e hélio. A camada logo abaixo, chamada de crosta externa, é composta por uma rede de núcleos atômicos, além de um gás degenerado e relativístico de elétrons (essencialmente, a mesma matéria encontrada nas anãs brancas) (CAMENZIND, 2007). A crosta interna é composta por nêutrons em um estado superfluido. Por fim, no centro da estrela está o núcleo, onde todos os núcleos atômicos foram dissolvidos em seus constituintes, ou seja, em prótons e nêutrons. Como o regime de densidade presente é extremamente elevado, estados exóticos da matéria podem aparecer, desde píons e káons à híperons e quarks livres (GLENDENNING, 1997; WEBER, 1999).

A descrição do núcleo da estrela de nêutrons está diretamente associada à teoria das interações fortes, a QCD, como será melhor explorado na seção 3.1. Há incertezas na descrição de sistemas com esse regime de densidade pela QCD, isto é, em sistemas onde a teoria perturbativa não é mais aplicável. Desta forma, o nome “estrela de nêutrons” leva ao conceito errôneo de uma estrela composta majoritariamente por nêutrons. Enquanto, na verdade, este nome abrange uma categoria vasta de diferentes objetos teóricos.

2.5 Conclusão

Neste capítulo, abordamos os conceitos necessários para o entendimento das estrelas estranhas, do ponto de vista gravitacional. Para tanto, descrevemos as teorias da gravitação, isto é, a lei da gravitação universal e a relatividade geral, e mostramos a caracterização de uma estrela em ambas. A evolução estelar também foi discutida, a fim de situarmos como objetos compactos se formam. Estes objetos compreendem as anãs brancas, cujas propriedades foram revisitadas, incluindo a discussão acerca das diferenças entre relatividade geral e gravitação newtoniana. Uma sinopse sobre buracos negros foi apresentada, juntamente às fotos recentemente obtidas pela colaboração EHT. Por fim, concluímos que estrelas de nêutrons não são completamente compreendidas, visto que a

sua composição está atrelada às interações fortes entre nêutrons, o que não é bem estabelecido nestes regimes de densidades elevadas, como iremos explorar no próximo capítulo.

3 ESTRUTURA DAS ESTRELAS ESTRANHAS

Neste capítulo discorreremos acerca das partículas fundamentais e de suas respectivas interações. Explanaremos as possíveis constituições de uma estrela de nêutrons, descrevendo a interação entre nêutrons neste regime de densidades pelo modelo de sacola do MIT. Posteriormente, dentro do modelo de sacola do MIT, iremos averiguar a hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa, e descreveremos a SQM, através de suas equações de estado, como um dos possíveis constituintes de uma estrela de nêutrons.

3.1 Modelo Padrão da física de partículas

O Modelo Padrão da física de partículas descreve a natureza em termos de seus constituintes fundamentais, as partículas elementares, e da interação entre elas, as forças, que por sua vez são explicadas pela troca de outras partículas, chamadas mediadoras (THOMSON, 2013). Cotidianamente, o átomo é o estado fundamental, sendo contituído por um núcleo composto por núcleons – coletivo de prótons e nêutrons – e elétrons presentes em uma nuvem eletrônica. A ionização do átomo requer energia, ou seja, em energias mais altas o núcleo atômico torna-se um íon e os elétrons partículas livres. De certa forma, podemos dizer que o Universo se comporta diferentemente de acordo com a escala de energia. Em energias ainda mais elevadas, pode-se observar que prótons e nêutrons possuem estrutura interna, os quarks. Até onde se sabe, quarks são como elétrons, no sentido de que também são partículas elementares, sem subestrutura (GRIFFITHS, 2008).

A nossa descrição atual da natureza consiste em 12 partículas elementares, com suas respectivas 12 antipartículas, formando tudo o que conhecemos. As partículas elementares são todas férmions, partículas de spin semi-inteiro e as separamos em dois grupos: os léptons e os quarks (HALZEN; MARTIN, 1984). O mais famoso dos léptons é o elétron (e^-), que juntamente ao neutrino do elétron (ν_e) e aos quarks *up* (u) e *down* (d), formam a primeira geração. O e^- possui carga elétrica $-e$, onde e é a carga elétrica fundamental (no S.I., $e \simeq 1{,}6 \times 10^{-19}$ C), e o ν_e é eletricamente neutro, enquanto os quarks possuem carga elétrica fracionária, sendo a carga do u igual a $+2e/3$ e a carga do d igual a $-e/3$. As antipartículas correspondentes são o pósitron (e^+), o antineutrino do elétron ($\bar{\nu}_\mathrm{e}$)[1] e os antiquarks $\bar{\mathrm{u}}$ e $\bar{\mathrm{d}}$. A segunda e a terceira gerações são versões mais massivas da primeira geração (THOMSON, 2013), no sentido de que as partículas possuem a mesma carga elétrica e spin 1/2, ou seja, que as gerações diferem entre si apenas pela massa das partículas – com exceção dos neutrinos, cujas massas são desconhecidas –, sendo a terceira geração a mais massiva. A segunda geração contém o múon (μ^-) (que pode ser visto como um elétron mais massivo), o neutrino do múon (ν_μ), e os quarks *charm* (c) e *strange* (s), que possuem as mesmas propriedades dos quarks u e d, respectivamente, diferindo apenas na massa e nos números quânticos chamados charme e estranheza. Por fim, a terceira e última geração compreende o tau (τ^-), o neutrino do tau (ν_τ) e os quarks *top* (t) (similar ao u) e *bottom* (b) (similar ao d) (GRIFFITHS,

[1] Representaremos as antipartículas por uma letra com uma barra em cima, salvo pelos antiléptons carregados que serão representados com o sinal positivo.

2008).

Existem quatro forças fundamentais na natureza: as nucleares forte e fraca, a eletromagnética e a gravitacional. Atualmente, a física de partículas descreve as forças através de teorias quânticas de campos (QFT, do inglês *quantum field theory*). Porém, como a QFT correspondente à gravitação possui falhas, esta força não está inclusa no Modelo Padrão (THOMSON, 2013). Cada força tem correspondente a si um bóson – partícula de spin inteiro – chamado de carregador de força, que só atua como mediador da interação entre partículas que possuam aquela carga específica da força em questão. A tabela 3.1 apresenta as forças e suas respectivas intensidades e cargas associadas, como também, o bóson mediador da interação, seguido do seu spin e de sua massa. No caso da interação fraca, a carga responsável pela interação é chamada de sabor, tal que este é simplesmente o "rótulo" da partícula, ou seja, basta uma partícula existir para estar sujeita à interação fraca. Embora o Modelo Padrão não contenha a força gravitacional, espera-se a existência do bóson carregador de força desta interação, o gráviton, que nunca foi detectado experimentalmente. Assim, hipoteticamente, todas as partículas massivas interagem gravitacionalmente através da troca de grávitons (GRIFFITHS, 2008). Entretanto, uma teoria quântica da gravidade é de difícil obtenção, pois nas escalas de energia presentes em interações quânticas a gravidade é a mais fraca das quatro forças, devido às pequenas massas das partículas, além de dificuldades na sua quantização.

Tabela 3.1 – Intensidade das quatro forças fundamentais, entre partículas situadas a 1 fm $= 10^{-15}$ m (à grosso modo, o raio de um próton) e características dos bósons carregadores de força.

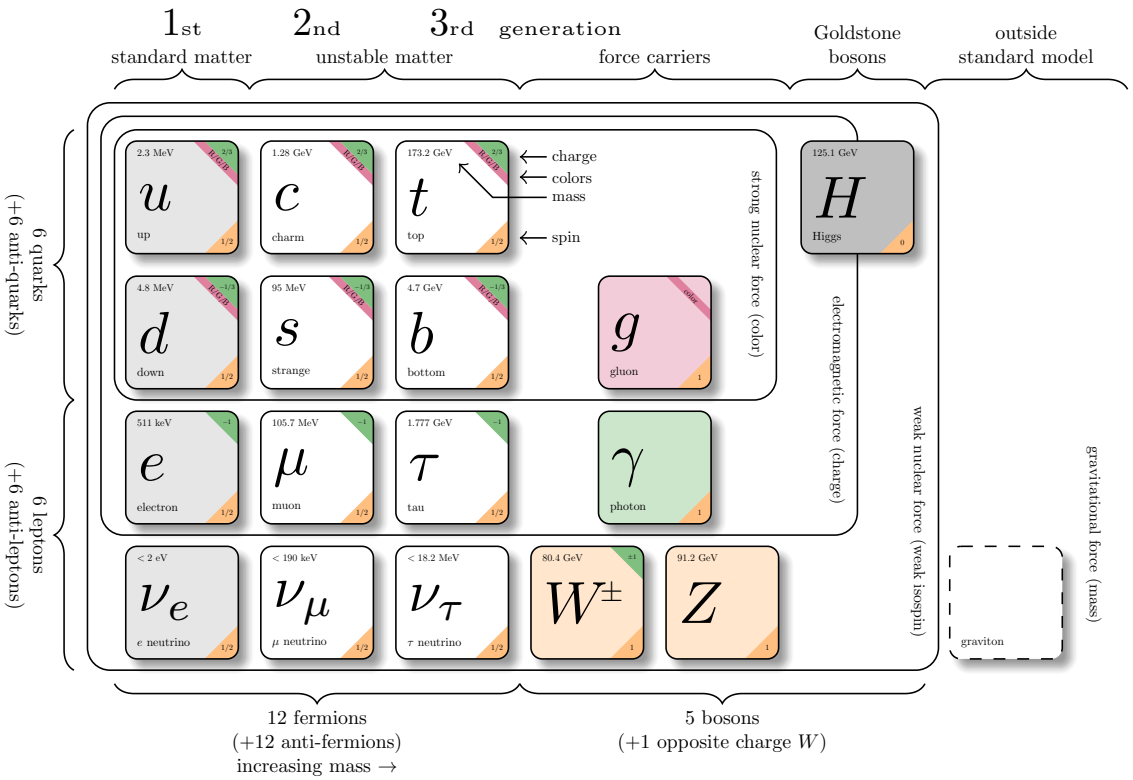
Força	Intensidade	Carga associada	Bóson	Spin	Massa/GeV
Forte	1	Cor	Glúon g	1	0
Eletromagnetismo	10^{-3}	Elétrica	Fóton γ	1	0
Fraca	10^{-8}	Sabor	bóson $\mathrm{W}^{\pm}$	1	80,4
			bóson Z	1	91,2
Gravidade	10^{-37}	Massa	Gráviton G	2	0

Fonte: Adaptada de (THOMSON, 2013, p. 6)

Além dos quatro bósons mediadores e dos 12 férmions elementares, o Modelo Padrão contempla a existência do bóson de Higgs, teorizado por Peter Higgs (HIGGS, 1964) em 1964 e detectado experimentalmente em 2012, no LHC pelos experimentos ATLAS (ATLAS Collaboration, 2012) e CMS (CMS Collaboration, 2012). Resumidamente, o bóson de Higgs possui massa de aproximadamente 125 GeV, além de ser um bóson escalar – spin 0 – e ser responsável por conceder massa às partículas, através do mecanismo de Higgs (THOMSON, 2013). As partículas do Modelo Padrão, juntamente às suas respectivas características, estão ilustradas na figura 3.1.

As partículas mediadoras das interações fundamentais também são ditas partículas virtuais, pois existem quase que instantaneamente durante a interação, e não são observadas diretamente. Só somos capazes de detectar as partículas do estado inicial (anterior à interação) e do estado final (posterior à interação), onde podem estar presentes os bósons mediadores desde que tenham sido emitidos, sendo assim, partículas reais. Desta forma, descrevendo as forças fundamentais pela troca de partículas virtuais, não existe o problema de ação à distância (THOMSON, 2013). A

Figura 3.1 – As partículas elementares de acordo com o Modelo Padrão da física de partículas. Os valores no canto superior esquerdo de cada caixa descrevem a respectiva massa da partícula. No canto superior direito, de cima para baixo, está representada a carga elétrica (em verde) e a carga de cor (em roxo). No canto inferior direito está o spin da partícula.



Fonte: Retirada de (BURGARD, 2016).

partícula mediadora carrega o *momentum* das partículas do estado inicial e o transfere para as partículas do estado final, caracterizando a interação como uma troca de *momentum*. Por outro lado, as interações podem ser vistas como o acoplamento dos bósons mediadores com os férmions, e a intensidade dessa interação passa a ser determinada pela constante de acoplamento g, que pode ser vista como uma medida da probabilidade do férmion emitir ou absorver o bóson da interação correspondente (GRIFFITHS, 2008; HALZEN; MARTIN, 1984). Ao invés de trabalharmos com a constante de acoplamento, é usual definirmos uma constante adimensional α que é proporcional ao quadrado de g. No caso do eletromagnetismo, descrito pela eletrodinâmica quântica (QED, do inglês *quantum eletrodynamics*), $g = e$ e (THOMSON, 2013)

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}\,, \tag{3.1}$$

lembrando que e é adimensional em unidades naturais. Este valor é praticamente constante independente da escala de distância (ou energia) levada em consideração (GRIFFITHS, 2008). Para a troca de *momentum* entre dois elétrons, por exemplo, através de apenas um fóton virtual, temos que a dependência da probabilidade de que ocorra esta interação é proporcional a α^2. Se dois fótons forem trocados, surgirão termos que dependem de α^4, e assim por diante. Como neste caso, $\alpha < 1$,

é conveniente o uso da teoria de perturbação para descrever processos eletromagnéticos dentro da QED e em excelente aproximação, podemos considerar apenas o processo descrito pela troca de um único fóton (THOMSON, 2013).

A QFT responsável pela interação forte é a cromodinâmica quântica (QCD, do inglês *quantum chromodynamics*), onde a partícula mediadora da interação é o glúon, e a força se deve à carga de cor, presente apenas em quarks e glúons. De todos os bósons mediadores, o glúon é o único que possui a carga associada à interação, ou seja, o glúon possui duas cargas de cor, sendo que cada carga de cor pode ser vermelho, verde ou azul[2] (HALZEN; MARTIN, 1984). De todos os férmions elementares, os quarks são os únicos que interagem através de todas as forças fundamentais, pois possuem as quatro cargas responsáveis pelas quatro interações fundamentais. Desta forma, quarks são definidos a partir da sua carga de cor, carga elétrica, massa e spin. Os quarks d, u e s são os ditos quarks leves, e possuem massas de 0,003 GeV, 0,005 GeV e 0,1 GeV, respectivamente. Os quarks pesados, c, b e t, possuem massas de 1,3 GeV, 4,5 GeV e 174 GeV, respectivamente (THOMSON, 2013).

Existem diversas evidências experimentais acerca da existência de quarks. Porém, partículas de carga elétrica fracionária nunca foram detectadas diretamente, em outras palavras, quarks nunca foram detectados livres (GRIFFITHS, 2008). A explicação para esta evidência experimental vem da hipótese do confinamento de cor, que postula que objetos que possuem carga de cor estão sempre confinados em estados com carga de cor nula. Sendo assim, somente estados incolores podem se propagar livremente na natureza. Acredita-se que o confinamento seja ocasionado pelas interações entre glúons, já que estes possuem a carga de cor e podem interagir entre si, restringindo esta força a curtos alcances (THOMSON, 2013).

Até hoje, provas analíticas do conceito de confinamento não foram obtidas. Entretanto, uma visão qualitativa pode ser obtida pelo exemplo de um quark e um antiquark livres sendo afastados continuamente. A interação entre eles será mediada por glúons virtuais que, por carregarem carga de cor, irão se atrair, comprimindo o campo de cor em um tubo entre os quarks. Em distâncias relativamente grandes, a densidade de energia do campo de glúons no tubo entre os quarks é constante. Sendo assim, a energia armazenada no campo de glúons será proporcional à distância entre os quarks (GRIFFITHS, 2008). Este crescimento linear da energia armazenada com a distância, requer uma quantidade infinita de energia para separar o par quark-antiquark! Desta forma, torna-se energeticamente mais favorável a formação de um novo par quark-antiquark, ao longo do tubo, do que a separação dos quarks. A principal implicação é que apenas combinações de quarks e glúons com carga de cor nula podem existir nas escalas de energia (distâncias) presentes no nosso cotidiano. Estes estados incolores são denominados hádrons, e não possuem campo de cor entre si (HALZEN; MARTIN, 1984; THOMSON, 2013).

As configurações de hádrons mais comuns, que geram uma carga de cor nula, são os bárions e os mésons. Os bárions são constituídos por três quarks, um de cada cor, e os mésons são compostos por um quark de uma determinada cor e um antiquark com a anticor correspondente. Na

[2] Os antiquarks possuem a carga de anticor, que quando combinada com a respectiva carga de cor, resulta em uma carga de cor nula ou “branca”.

matéria ordinária estão presentes apenas os quarks u e d, no interior de prótons (uud) e nêutrons (ddu). Vemos, por esta definição, que núcleons são bárions, e portanto a matéria ordinária também é chamada de matéria bariônica. Estipulamos para cada bárion o número bariônico A igual a um, resultando que cada quark contribui com 1/3, ou seja, que cada quark possui $A = 1/3$ (GRIFFITHS, 2008). Outros exemplos de bárions são os híperons, que além dos quarks u e d possuem o quark s, em diferentes combinações como, por exemplo, a partícula Λ (uds). Um exemplo de méson são os píons, conhecidos por serem os mediadores da interação forte residual entre núcleons, sendo que esta força é responsável pela manutenção do núcleo atômico perante a repulsão coulombiana, como postulado por Yukawa em 1935 (YUKAWA, 1935).

Ao contrário da QED, onde a constante de acoplamento é, de fato, (praticamente) constante, na QCD a constante de acoplamento α_S varia de valores pequenos até valores próximos a unidade, de acordo com a escala de energia, que, por sua vez, é inversamente proporcional à distância entre as partículas (THOMSON, 2013). A escala de energia pode ser determinada em termos da troca de *momentum* q entre as partículas. Desta forma, a variação de α_S com o quadrado da transferência de *momentum* é tal que (GRIFFITHS, 2008)

$$\alpha_S(q^2) = \frac{12\pi}{(11N_c - 2N_f)\ln(q^2/\Lambda^2)} \qquad (q^2 \gg \Lambda^2)\,, \tag{3.2}$$

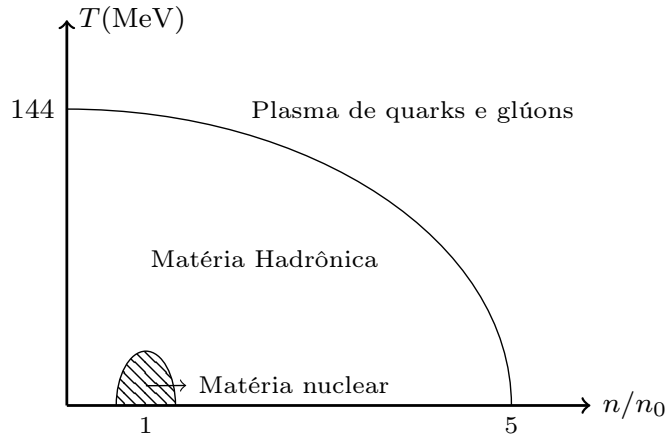
onde N_c é o número de cores, N_f o número de sabores (no Modelo Padrão, $N_c = 3$ e $N_f \leq 6$) e Λ é uma constante. Experimentos sugerem que o valor de Λ está entre 100 MeV e 500 MeV (GRIFFITHS, 2008).

A análise do comportamento de α_S, para $|q| \sim 1$ GeV (o que corresponde à longas distâncias) e dentro do Modelo Padrão, mostra a forte interação entre quarks e os altos valores de α_S impedem o uso de teoria da perturbação (THOMSON, 2013). Outro importante aspecto desta análise, é que para valores elevados de $|q| \sim 100$ GeV, $\alpha_S \simeq 0{,}1$, onde pode-se utilizar a teoria da perturbação. Para valores ainda maiores de $|q|$, α_S continua decrescendo, até o ponto em que quarks estão interagindo pouco, e se comportam como partículas praticamente livres. A esta propriedade damos o nome de liberdade assintótica. No interior de hádrons, as pequenas distâncias correspondentes implicam que os quarks podem ser tratados como partículas livres (GRIFFITHS, 2008; THOMSON, 2013).

3.2 Modelo de sacola do MIT para estrelas

Vimos anteriormente que, na QCD a intensidade da interação depende das circunstâncias em que esta ocorre. Sendo assim, quando a constante de acoplamento (medida da intensidade da interação) for pequena, um tratamento perturbativo é válido, caso contrário, o tratamento se torna não perturbativo. A descrição dos hádrons em escalas de baixas energias ou grandes distâncias espaciais, como as observadas em estrelas, não permite o uso de teorias perturbativas, portanto, suas soluções são de difícil obtenção (CHEUK-YIN, 1994). A partir dos resultados obtidos pela QCD na rede (WILSON, 1974), inspiraram-se modelos fenomenológicos, que permitem uma caracterização dos hádrons e de estados exóticos da matéria. Um desses modelos que reproduz os conceitos de confinamento e liberdade assintótica é o chamado de modelo de sacola do MIT (CHODOS *et al.*,

Figura 3.2 – Diagrama de fase (aproximado) da QCD, considerando $B^{1/4} = 206\,\text{MeV}$ e $n_0 = 0{,}16\,\text{fm}^{-3}$. Para temperaturas e/ou densidade críticas o rompimento da sacola leva o sistema a um plasma de quarks e glúons. A aproximação consiste em considerarmos a transição de fase como sendo de primeira ordem, o que, na verdade, é um tema em aberto.



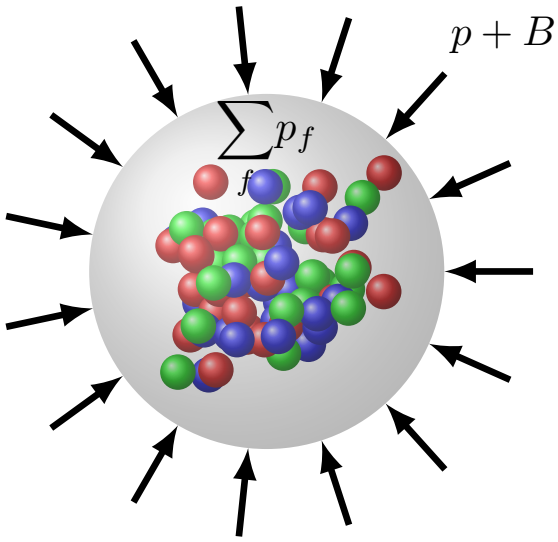
Fonte: Adaptada de (CHEUK-YIN, 1994, p. 172).

1974). Nele, os hádrons são interpretados como uma região finita do espaço, isto é, uma "sacola", dentro da qual estão contidos os campos devidos aos quarks e glúons. É assumido no modelo que esta sacola é mantida por uma pressão constante B, chamada pressão de sacola, responsável por equilibrar a pressão exercida pelos quarks no interior da sacola (JAFFE, 1977), reproduzindo o conceito de confinamento.

Dentro deste modelo, são possíveis novas fases da matéria de quarks, já que se a pressão interna for maior do que a pressão de sacola, ocorrerá o rompimento do hádron e a matéria de quarks estará livre em uma região "incolor" (GLENDENNING, 1997; LAGERKVIST; SAMUELSSON, 2015). Uma pressão cinética dos quarks, alta o suficiente para superar a pressão de sacola B, ocorre quando a temperatura for alta e/ou a densidade bariônica for elevada, dando origem a um plasma de quarks e glúons (CHEUK-YIN, 1994), como mostra a figura 3.2. Para que ocorra o plasma de quarks e glúons, com densidade bariônica nula, deve-se alcançar uma temperatura crítica. Cheuk-Yin (1994) estimou que a temperatura crítica é de aproximadamente 144 MeV, para uma pressão de sacola $B^{1/4} = 206\,\text{MeV}$. Por outro lado, a razão pela qual uma densidade elevada pode romper a sacola é, novamente, a pressão de degenerescência. A densidade bariônica da matéria ordinária é $n_0 = 0{,}16\,\text{fm}^{-3}$ e, para que ocorra o rompimento do hádron à temperatura zero e com $B^{1/4} = 206\,\text{MeV}$, a densidade crítica é pelo menos $5\,n_0$ (CHEUK-YIN, 1994). Densidades desta ordem podem estar presentes nas estrelas catalogadas como estrelas de nêutrons, como discutido na subseção 2.4.3, ou pelo menos, no núcleo de algumas dessas, levando às diferentes possíveis formações desses objetos (GLENDENNING, 1997; WEBER, 1999).

Considerando as densidades presentes nas estrelas de nêutrons suficientes para formar uma matéria de quarks, é possível estender o modelo de sacola do MIT para descrever uma estrela

Figura 3.3 – Ilustração do equilíbrio das pressões para uma matéria de quarks livres em equilíbrio hidrostático. A pressão no interior da sacola se deve ao movimento dos quarks livres e é designada por $\sum_f p_f$.



Fonte: Adaptada de (FUNE, 2012, p. 10).

composta por quarks livres. De fato, pode-se usar o modelo para estrelas em equilíbrio hidrostático, a fim de obter a equação de estado (GLENDENNING, 1997; WEBER, 1999). Neste sentido, a estrela inteira é interpretada como uma sacola incolor, constituída por quarks livres. Ao considerarmos que a estrela possui simetria esférica, é estática e composta por um fluido ideal isotrópico, temos que a pressão no interior da estrela vai ser dada pela contribuição de cada sabor de quark à pressão cinética, identificada por p_f, onde o subíndice f representa o sabor. Logo, pelo modelo de sacola do MIT, a pressão total p é dada por (FUNE, 2012)

$$p = \sum_f p_f - B \,. \tag{3.3}$$

Ilustramos o equilíbrio entre essas pressões para uma estrela densa composta por quarks livres na figura 3.3.

Como quarks são férmions, deve-se utilizar a estatística de Fermi-Dirac, da mesma forma que foi feito nas seções 2.4.2 e 2.4.3, para obter uma equação de estado, que está formalmente derivada no apêndice C. Porém, dentro do modelo de sacola do MIT, deve-se levar em conta a pressão de sacola B, como mostra a equação (3.3). A partir disto, considerando que o fluido ideal de quarks que constitui a estrela é, na verdade, um gás ideal de Fermi completamente degenerado e ultrarrelativístico, tem-se que a pressão, a densidade de energia e a densidade bariônica em unidades

naturais são, respectivamente, dadas por (GLENDENNING, 1997; WEBER, 1999)

$$p = -B + \frac{1}{4\pi^2}\sum_f \mu_f^4 , \tag{3.4}$$

$$\varepsilon = B + \frac{3}{4\pi^2}\sum_f \mu_f^4 = 4B + 3p , \tag{3.5}$$

$$n = \sum_f \frac{\mu_f^3}{3\pi^2} , \tag{3.6}$$

para um gás de quarks não massivos a temperatura zero, onde μ_f é o potencial químico para o quark de sabor f. Este limite de temperatura zero é aplicável para cálculos relativos à estrelas similares as estrelas de nêutrons, já que, pouco tempo após o seu surgimento, suas temperaturas caem para valores da ordem de KeV, o que é desprezível na escala nuclear (WEBER, 1999). Para fins de comparação, um gás de quarks massivos à temperatura zero, possui as seguintes equações de estado

$$p = -B + \sum_f \frac{1}{4\pi^2}\left[\mu_f k_f \left(\mu_f^2 - \frac{5}{2}m_f^2\right) + \frac{3}{2}m_f^4 \ln\left(\frac{\mu_f + k_f}{m_f}\right)\right] , \tag{3.7}$$

$$\varepsilon = B + \sum_f \frac{3}{4\pi^2}\left[\mu_f k_f \left(\mu_f^2 - \frac{1}{2}m_f^2\right) - \frac{1}{2}m_f^4 \ln\left(\frac{\mu_f + k_f}{m_f}\right)\right] , \tag{3.8}$$

$$n = \sum_f \frac{k_f^3}{3\pi^2} , \tag{3.9}$$

onde k_f é o momento de Fermi associado ao quark de sabor f, definido em termos do potencial químico, já que $\mu_f^2 = m_f^2 + k_f^2$ (GLENDENNING, 1997), onde m_f é a massa do quark de sabor f.

3.3 Estrutura das estrelas estranhas e a hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa

As equações de estado obtidas pelo modelo de sacola do MIT podem ser aplicadas para qualquer matéria composta por um gás de quarks livres, independente dos sabores de quarks sendo levados em consideração. Porém, quais sabores de quarks devem fazer parte de uma matéria formado por quarks livres? A hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa (BODMER, 1971; TERAZAWA, 1989; WITTEN, 1984) consiste na afirmação de que a SQM é o verdadeiro estado da matéria que interage fortemente. Sendo assim, a SQM é mais estável do que a matéria nuclear ordinária e deve se fazer presente no interior da estrela. A fim de analisarmos a estabilidade da SQM, devemos comparar a sua energia de ligação – densidade de energia superficial por densidade bariônica – com a do isótopo ^{56}Fe (o elemento mais estável encontrado na natureza), que é 930 MeV (WEBER, 1999). Desta forma, sabendo que o estado mais estável é aquele que representa a configuração de menor energia de ligação, a SQM deve satisfazer a condição

$$\left.\frac{E}{A}\right|_{\mathrm{SQM}} < \left.\frac{E}{A}\right|_{^{56}\mathrm{Fe}} , \tag{3.10}$$

onde $E = V\varepsilon_{\mathrm{sup}}$ é a energia de ligação, $\varepsilon_{\mathrm{sup}}$ é a densidade de energia superficial e V o volume ocupado pelo gás. Além disso, $A = Vn$ é o número bariônico, ou seja, $E/A = \varepsilon_{\mathrm{sup}}/n$. É razoável

assumir que a SQM faça parte de uma estrela com tamanha densidade, seja uma estrela híbrida ou uma estrela de quarks, pois espera-se que híperons – hádrons que contenham o quark s – sejam produzidos pelas interações fortes entre nêutrons (GLENDENNING, 1997).

A partir do rompimento de nêutrons no interior da estrela, uma matéria de quarks u e d livres poderia ser formada. Entretanto, estes quarks estão presentes na matéria ordinária, e não parecem apresentar uma configuração de menor energia do que o isótopo ^{56}Fe. Por esta razão, iremos impor a seguinte condição

$$\left.\frac{E}{A}\right|_{^{56}\mathrm{Fe}} < \left.\frac{E}{A}\right|_{\mathrm{u,d}} , \tag{3.11}$$

que será utilizada para estipularmos os intervalos possíveis da pressão de sacola B.

Tomando as equações para quarks não massivos, Equações (4.3), (3.5) e (3.6), na superfície da sacola (onde $p = 0$) temos que a densidade de energia superficial é $\varepsilon_{\mathrm{sup}} = 4B$, pela equação (3.5). Enquanto isso, pela equação (4.3), a pressão de sacola será dada por (WEBER, 1999)

$$B = \frac{1}{4\pi^2} \sum_f \mu_f^4 . \tag{3.12}$$

Por simplicidade, iremos assumir a estrela como sendo eletricamente neutra, e descartaremos a presença de léptons carregados e neutrinos no interior da estrela. A condição de neutralidade elétrica global é dada por

$$q = \sum_f Q_f n_f = \frac{1}{3\pi^2} \sum_f Q_f \mu_f^3 = 0 , \tag{3.13}$$

onde q é a densidade de carga elétrica e Q_f é carga elétrica do quark de sabor f. Lembrando que os valores das cargas elétricas dos quarks foram apresentados na seção 3.1. Desta forma, podemos relacionar os potenciais químicos dos quarks presentes na estrela.

A fim de verificarmos a condição representada na equação (3.11), analisaremos primeiro pela condição de neutralidade global as relações entre os potenciais químicos para os quarks u e d. Pela equação (4.6), temos que

$$\mu_d = 2^{1/3} \mu_u \equiv \mu_2 . \tag{3.14}$$

Ao aplicarmos este resultado na equação (3.6), obtemos

$$n = \mu_2^3 / \pi^2 . \tag{3.15}$$

Além disso, tomando a equação (3.12) e isolando μ_2 temos

$$\mu_2 = \left(\frac{4\pi^2}{1 + 2^{4/3}} \right)^{1/4} B^{1/4} . \tag{3.16}$$

Logo, a energia de ligação, para uma matéria de quarks ud livres, é tal que (NYÍRI, 2001; WEBER, 1999)

$$\left.\frac{E}{A}\right|_{\mathrm{u,d}} = \frac{4B\pi^2}{\mu_2^3} = (2\pi)^{1/2} (1 + 2^{4/3})^{3/4} B^{1/4} \simeq 934\,\mathrm{MeV} , \tag{3.17}$$

onde usamos $B^{1/4} = 145\,\mathrm{MeV}$. A partir da comparação entre os valores da energia de ligação da matéria de quarks u e d livres e do isótopo ^{56}Fe, vemos que o valor mínimo de $B^{1/4}$ deve estar em

torno de 145 MeV, já que para valores menores do que este, a matéria de quarks u e d livres seria mais estável do que a matéria ordinária, deixando de satisfazer a condição (3.11).

No caso da SQM, temos que um número igual de quarks u, d e s satisfaz a condição de neutralidade elétrica (4.6), implicando em

$$\mu_3 \equiv \mu_u = \mu_d = \mu_s \,. \tag{3.18}$$

Logo

$$n = \mu_3^3/\pi^2 \,. \tag{3.19}$$

Desta forma, pela equação (3.12) ao isolarmos μ_3 obtemos

$$\mu_3 = \left(\frac{4\pi^2}{3}\right)^{1/4} B^{1/4} \,. \tag{3.20}$$

Isto implica que a energia de ligação da SQM é

$$\left.\frac{E}{A}\right|_{\mathrm{SQM}} = \frac{4B\pi^2}{\mu_3^3} = (2\pi)^{1/2} 3^{3/4} B^{1/4} \simeq 829\,\mathrm{MeV} \,. \tag{3.21}$$

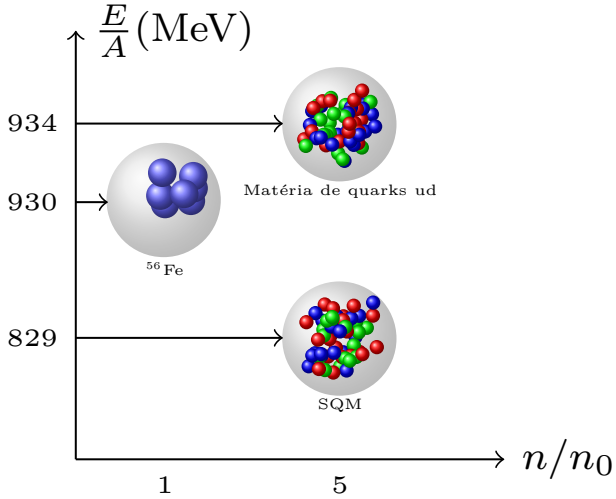
Através desta análise, provamos que a SQM é mais estável do que uma matéria contendo apenas quarks u e d livres e do que a matéria nuclear ordinária (lembrando que a energia de ligação do isótopo ^{56}Fe é 930 MeV). Sendo assim, concluímos que a hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa é válida, como ilustramos na figura 3.4, para certos valores de B. Na verdade, a SQM é absolutamente estável em relação ao isótopo ^{56}Fe se $B^{1/4} < 162{,}8$ MeV (WEBER, 1999) e, por esta razão, focaremos nosso trabalho nas estrelas estranhas.

A estabilidade da SQM está diretamente associada aos valores da pressão de sacola B. Teoricamente, a SQM é completamente estável em relação ao isótopo ^{56}Fe para $B^{1/4} < 162{,}8\,\mathrm{MeV}$, metaestável em relação a um gás de nêutrons para $B^{1/4} < 164{,}5\,\mathrm{MeV}$ e em relação a um gás de partículas Λ para $B^{1/4} < 195{,}2\,\mathrm{MeV}$ (WEBER, 1999). Esses são os limites superiores de B, enquanto que o limite inferior foi estabelecido pela condição (3.11) como sendo $B^{1/4} > 145\,\mathrm{MeV}$. A análise dos valores de B, sejam experimentais, observacionais ou simulações de computadores, não são triviais. Aziz *et al.* (2019) encontraram que o valor de B deve estar restrito ao intervalo $135{,}05\,\mathrm{MeV} < B^{1/4} < 224{,}81\,\mathrm{MeV}$. Entretanto, ao comparar suas predições de massa e raio com as observações de candidatos às estrelas estranhas, eles obtiveram que o limite inferior representa uma equação de estado muito mole[3], enquanto o limite superior representa uma equação de estado rígida. Além disto, esta comparação estabeleceu que o valor de B deve estar entre $152{,}63\,\mathrm{MeV} < B^{1/4} < 183{,}30\,\mathrm{MeV}$, para que os valores de massa e raio estejam de acordo com as observações (AZIZ *et al.*, 2019).

Deve-se ressaltar o fato de que a presença da matéria composta por átomos não contradiz a hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa, de que a SQM é o estado fundamental da matéria que

[3] Uma equação de estado dita mole representa uma pressão que cresce lentamente com um aumento na densidade. Por outro lado, uma equação de estado dita rígida representa o oposto, ou seja, uma equação de estado que cresce rapidamente com um aumento na densidade.

Figura 3.4 – Comparação das energias de ligação por número bariônico em função da razão entre as densidades bariônica e a nuclear ($n_0 = 0{,}16\,\mathrm{fm}^{-3}$). A partir das relações do modelo de sacola do MIT, estimamos que a SQM é mais estável do que a matéria de quarks u e d livres e até mesmo do que o isótopo ^{56}Fe, sendo assim o verdadeiro estado da matéria que interage fortemente.



Fonte: Adaptada de (WEBER, 1999, p. 29).

interage fortemente. Isto se deve ao fato de que a SQM não sobreviveu à era de altas temperaturas do Universo, gerando, entre outras coisas, a hadronização (WEBER, 1999). Desta forma, o Universo evoluiu independentemente do estado fundamental. Outro ponto que fortalece a hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa é que a matéria hadrônica, perante interações fracas, é estável por mais de 10^{60} anos (BODMER, 1971)! Um tempo muito maior do que a idade estimada do Universo de 13 bilhões de anos. Sendo assim, podemos esperar que a SQM só se faça presente no interior das estrelas mais densas e compactas, abrindo uma nova categoria para tais objetos. Por conta disto, esperamos que diferentes objetos possam ser formados nestas condições extremas de densidade. Nos casos menos densos, é consensual que as estrelas sejam compostas majoritariamente por nêutrons, enquanto configurações mais densas podem apresentar estados hadrônicos exóticos e até mesmo a SQM (GLENDENNING, 1997).

3.4 Conclusão

Neste capítulo revisamos os conceitos do Modelo Padrão da física de partículas, mantendo o foco na QCD. Posteriormente, fizemos uso do modelo de sacola do MIT para obter as equações de estado para estrelas de quarks, e que empregaremos para estrelas estranhas e para a parte de quarks livres em uma estrela híbrida. Vimos que a SQM, que constitui completamente uma estrela estranha, possivelmente é o estado fundamental da matéria que interage fortemente. Entretanto, esta estabilidade absoluta da SQM com relação à matéria ordinária só é válida para alguns valores da pressão de sacola. No próximo capítulo apresentaremos os resultados pertinentes às estrelas

híbridas e estranhas, utilizando o modelo de sacola do MIT para descrever a matéria de quark presentes nestes objetos.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

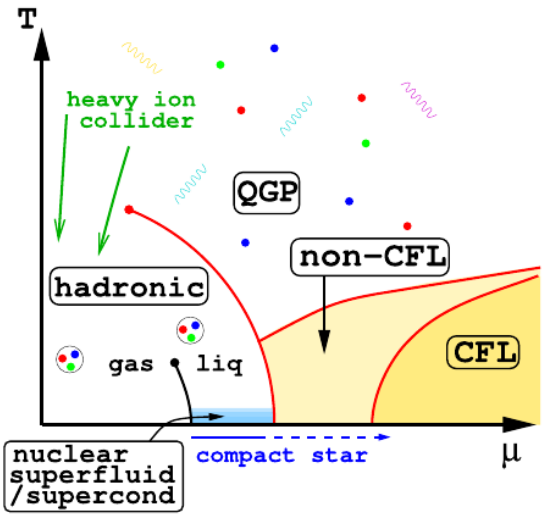
Começaremos este capítulo revisitando os principais aspectos acerca das estrelas mais densas presentes no Universo, desde a equação TOV até a equação de estado. Mostraremos também os indícios atuais da transição de fase da matéria hadrônica para a matéria de quarks livres, e quais as possíveis constituições de uma estrela de nêutrons a partir disto. Também, discorreremos sobre os resultados obtidos para estrelas estranhas, a partir das equações de estado e da equação TOV. Esta análise começará pelas relações pressão-raio e massa-raio, no interior da estrela, para um determinado valor de B. Feito isto, discutiremos as possíveis configurações estáveis de uma estrela estranha, a partir dos perfis massa-pressão central e massa-raio para um único valor da pressão de sacola. Também analisaremos estes comportamentos para alguns valores de B, onde a hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa permanece válida. Por fim, apresentaremos o perfil massa-pressão central para uma estrela híbrida, comparando-os para os dois tipos de estrela.

4.1 Aspectos gerais

A dificuldade em determinar qual o estado da matéria e seus constituintes no interior de um pulsar advém das elevadas densidades presentes nesses objetos, que estão muito além dos limites físicos testados em laboratórios. A fim de solucionar esta dificuldade, devemos compreender como funcionam as interações entre nêutrons, a possível formação de outros hádrons e, até mesmo, a transição de fase da matéria hadrônica para a matéria de quarks. Este último ponto, em especial, ganhou muita atenção nos últimos anos, e hoje, supomos que o diagrama correspondente à transição de fase seja da forma mostrada na figura 4.1, que é muito mais complexa do que àquela apresentada na figura 3.2. Este novo diagrama relaciona as fases da matéria com a temperatura e com o potencial químico, lembrando que o potencial químico está associado à densidade bariônica. Desta forma, o diagrama mostra que a fase hadrônica pode aparecer nas formas de gás, líquido (matéria nuclear) e de superfluido, sendo que a fase de gás é atingida nos aceleradores de partículas. Fora da fase hadrônica, para baixas temperaturas, podemos ter uma matéria de quarks u, d e s, formando pares de Cooper em uma fase supercondutora de cor (ALFORD; HAN; SCHWENZER, 2019). Em altas temperaturas e densidades (elevado potencial químico) chegamos ao plasma de quarks e glúons. A transição de fase da matéria hadrônica para uma matéria de quarks livres permanece um tema de intenso estudo, devido à complexidade do diagrama apresentado na figura 4.1. Por conta desta complexidade e do difícil tratamento relacionado à supercondutividade de cor na QCD, tomaremos como verdadeira a transição de fase aproximada da matéria hadrônica para a matéria de quarks e glúons livres demonstrada na figura 3.2.

Estrelas de nêutrons não são inteiramente compostas por um gás de nêutrons, como acreditou-se na década de 1940. Como mostrado por Oppenheimer e Volkoff (1939), um gás de nêutrons livres degenerado não é capaz de suportar massas superiores a 0,7 $M_\odot$, e hoje sabemos da existência de pulsares com massas maiores do que duas massas solares (CROMARTIE *et al.*, 2019). Desta forma, outras partículas e estados da matéria devem fazer parte da constituição desses

Figura 4.1 – Diagrama representando as fases da matéria como função do potencial químico e da temperatura.



Fonte: Extraída de (ALFORD; HAN; SCHWENZER, 2019, p.3).

objetos (WEBER, 1999).

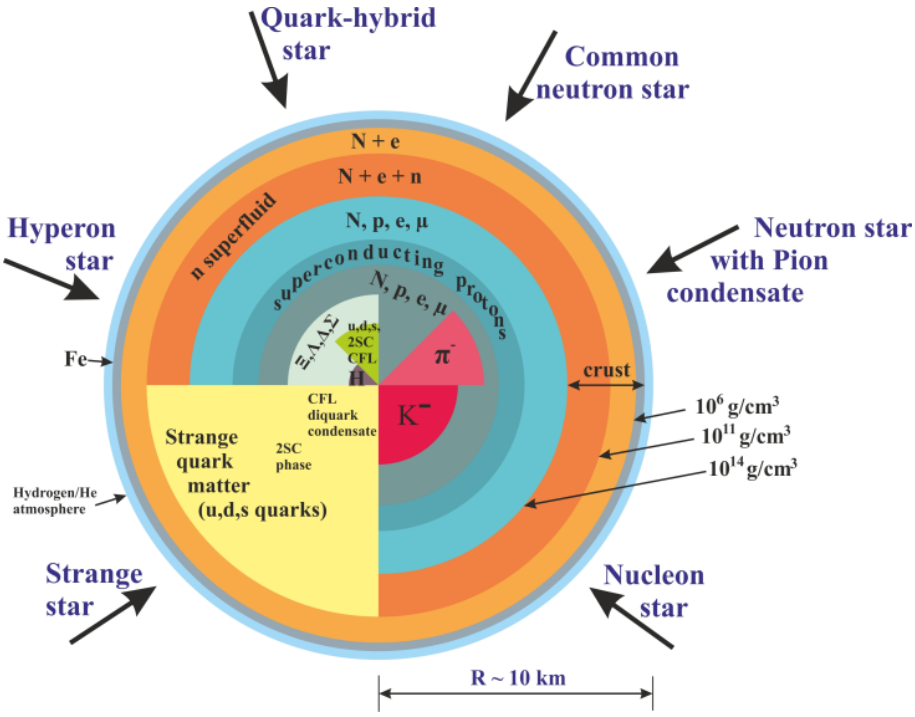
Sabemos que no seu processo de formação, uma estrela de nêutrons é produzida a partir de uma protoestrela de nêutrons, cujas temperaturas são elevadas. O esfriamento da estrela a partir da emissão de neutrinos, raios X e fótons, leva ao decaimento-β, onde nêutrons decaem em prótons, elétrons e antineutrinos. Os antineutrinos escapam da estrela, e o decaimento-β ocorre até que haja o equilíbrio entre prótons, elétrons e nêutrons. Esta relação de equilíbrio entre as espécies de partículas é escrita através do seu potencial químico, tal que, $\mu_{\mathrm{p}} = \mu_{\mathrm{n}} - \mu_{\mathrm{e}}$ (GLENDENNING, 1997).

Os potenciais químicos crescem com o aumento da densidade, que cresce conforme nos aproximamos do núcleo da estrela. Portanto, outros limites podem ser atingidos, levando à produção de outras partículas, como híperons, píons e káons (GLENDENNING, 1997). O limite para que uma determinada espécie de partícula esteja em equilíbrio na estrela, é que o potencial químico supere a massa da partícula. Se as condições forem satisfeitas no interior de uma estrela de nêutrons, as possibilidades decorrentes são inúmeras. A figura 4.2 mostra seis possíveis constituições para estrelas de nêutrons, com raio e massa de aproximadamente 10 km e 1,4 $M_{\odot}$, respectivamente. Começando a análise pelo primeiro quadrante e seguindo em sentido anti-horário, temos:

- Estrela de nêutrons com condensado de píons: possui uma primeira camada de hidrogênio e hélio, chamada de atmosfera, seguida por uma camada de ferro. Dentro da estrela, a crosta externa é formada por núcleos atômicos e elétrons, enquanto a crosta interna é formada por núcleos e um gás de elétrons e nêutrons degenerados, seguido por uma população de núcleos, prótons, elétrons e múons. Próximo ao núcleo encontra-se uma fase de prótons supercondutores, com o núcleo formado por um condensado de π^{-}.

- Estrela de nêutrons comum: idêntica à estrela de nêutrons com condensado de π^{-}, com exceção do núcleo, que é formado por núcleos, prótons, elétrons e múons.

Figura 4.2 – As possíveis faces de uma estrela de nêutrons.



Fonte: Extraída de (BLASZKIEWICZ *et al.*, 2016).

- Estrela híbrida: atmosfera, camada de ferro e crostas externa e interna iguais às da estrela de nêutrons comum, seguido de um líquido de nêutrons, prótons, elétrons e múons. Mais próximo ao núcleo podem estar presentes diversos tipos de híperons e até mesmo alguns quarks livres. Finalmente, no núcleo, a presença da SQM se faria dominante. Vale ressaltar que nem todos os híperons mostrados na figura 4.2 precisam estar presentes em uma estrela híbrida e que esta, de foram geral, é constituída por uma camada de matéria hadrônica e um núcleo de quarks livres, independente de quais hádrons façam parte da camada.

- Estrela de híperons: constituída da mesma forma que a estrela híbrida, porém, com núcleo formado por híperons.

- Estrela estranha: composta inteiramente pela SQM, desde que essa seja absolutamente estável com relação ao isótopo ^{56}Fe, em outras palavras, que a hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa seja válida. Pode possuir uma fina crosta com núcleos e elétrons, além da atmosfera de hidrogênio e hélio acima da camada de ferro.

- Estrela nucleônica: idêntica à estrela de nêutrons comum, porém, no núcleo, faz-se presente um condensado de K^-.

Por assumirmos válida a hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa, mostraremos os resultados pertinentes a uma estrela estranha.

4.2 Estrelas estranhas

Consideraremos as estrelas estranhas como estáticas, esfericamente simétricas, compostas pela SQM e sem crosta. De tal forma, que esta estrela possa ser descrita pela equação TOV

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{G\varepsilon(r)m(r)}{r^2}\left[1+\frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right]\left[1+\frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)}\right]\left[1-\frac{2Gm(r)}{r}\right]^{-1}, \tag{4.1}$$

pela equação de massa

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \varepsilon(r), \tag{4.2}$$

e pela equação de estado. No nosso caso, compararemos resultados para uma equação de estado que considera quarks sem massa (limite ultrarrelativístico) e quarks com massa (caso relativístico). No primeiro caso, temos que as equações que descrevem a SQM no interior da estrela são

$$p = -B + \frac{1}{4\pi^2}\sum_f \mu_f^4, \tag{4.3}$$

$$\varepsilon = B + \frac{3}{4\pi^2}\sum_f \mu_f^4 = 4B + 3p, \tag{4.4}$$

$$n = \sum_f \frac{\mu_f^3}{3\pi^2}. \tag{4.5}$$

A condição de neutralidade elétrica global, ou seja,

$$q = \sum_f n_f Q_f = 0, \tag{4.6}$$

onde Q_f é a carga do quark de sabor, implica em $2n_\mathrm{u} - n_\mathrm{d} - n_\mathrm{s} = 0$, com a possível solução $n_\mathrm{u} = n_\mathrm{d} = n_\mathrm{s}$. Esta solução, quando aplicada à equação (4.5), nos leva à igualdade entre os potenciais químicos, isto é, $\mu_\mathrm{u} = \mu_\mathrm{d} = \mu_\mathrm{s} \equiv \mu$. Além disso, pela equação (4.5) podemos escrever

$$\mu = \pi^{2/3} n^{1/3}. \tag{4.7}$$

Podemos relacionar a pressão com a densidade bariônica, ao substituirmos (4.7) na equação (4.3) obtemos

$$p = \frac{3\pi^{2/3} n^{4/3}}{4} - B, \tag{4.8}$$

lembrando que $\varepsilon = 3p + 4B$.

No caso relativístico, descrito pelas equações abaixo

$$p = -B + \sum_f \frac{1}{4\pi^2}\left[\mu_f k_f\left(\mu_f^2 - \frac{5}{2}m_f^2\right) + \frac{3}{2}m_f^4 \ln\left(\frac{\mu_f + k_f}{m_f}\right)\right], \tag{4.9}$$

$$\varepsilon = B + \sum_f \frac{3}{4\pi^2}\left[\mu_f k_f\left(\mu_f^2 - \frac{1}{2}m_f^2\right) - \frac{1}{2}m_f^4 \ln\left(\frac{\mu_f + k_f}{m_f}\right)\right], \tag{4.10}$$

$$n = \sum_f \frac{k_f^3}{3\pi^2}, \tag{4.11}$$

a condição de neutralidade global, equação (4.6), também implica em $n_{\mathrm{u}} = n_{\mathrm{d}} = n_{\mathrm{s}}$. Porém, isto não tem como consequência a igualdade entre os potenciais químicos, e sim, entre os momentos de Fermi, tal que definindo $k_{\mathrm{u}} = k_{\mathrm{d}} = k_{\mathrm{s}} \equiv k$, temos

$$k = \pi^{2/3} n^{1/3} \,. \tag{4.12}$$

A partir da equação acima podemos determinar o potencial químico, $\mu_f = \sqrt{k^2 + m_f^2}$, a pressão e a densidade de energia.

Os resultados referentes às estrelas estranhas foram obtidos integrando a equação TOV (4.1) e utilizando as equações de estado ultrarrelativística, dada pela equação (4.8), e relativística, representada pela equação (4.9), ambas à temperatura zero. Em nosso modelo, fizemos uso da densidade central n_c como um parâmetro de entrada, para um valor da pressão de sacola $B^{1/4}$ (mantendo a validade da hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa).

A integração da equação TOV é dependente de uma equação de estado na forma

$$p = p(\varepsilon) \,. \tag{4.13}$$

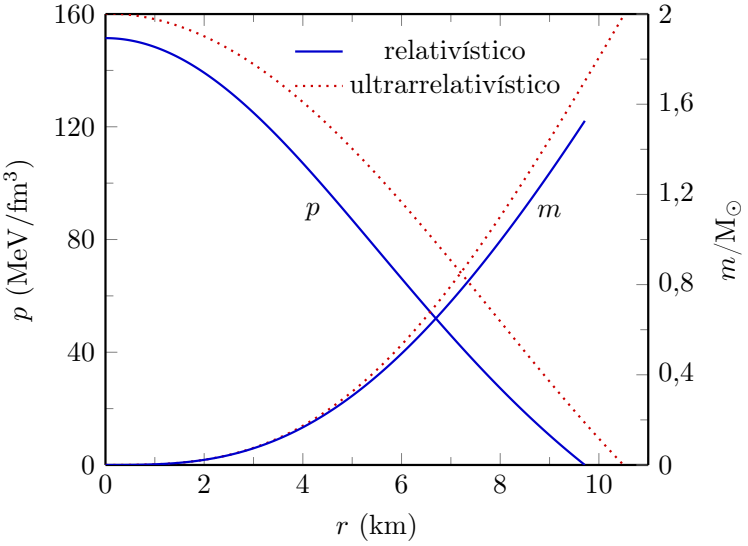
Isto é facilmente obtido no caso ultrarrelativístico, o que nos permite integrar a equação TOV diretamente. Por outro lado, não somos capazes de escrever a Equação (4.9) na forma (4.13). Portanto, fazemos uso de métodos de procura de raízes das funções, já que as equações (4.9) e (4.10) são ambas funções de k.

Na figura 4.3, mostramos o comportamento da pressão e da massa com o raio, do centro da estrela estranha até sua superfície, para $n_c = 5\,n_0$ (onde $n_0 = 0{,}16\,\mathrm{fm}$ é a densidade nuclear) e $B^{1/4} = 155\,\mathrm{MeV}$. Na superfície da estrela, a pressão deve ser nula, por causa do equilíbrio hidrostático, ou seja, as pressões de degenerescência, gravitacional e de sacola se anulam neste ponto. Além disso, atingimos, neste ponto, a massa e o raio totais da estrela, que são, respectivamente, $M = 1{,}526\,\mathrm{M}_\odot$ e $R = 9{,}715\,\mathrm{km}$, no caso relativístico. Enquanto isso, no limite ultrarrelativístico obtemos $M = 1{,}993\,\mathrm{M}_\odot$ e $R = 10{,}5\,\mathrm{km}$. Apesar de auxiliar no entendimento acerca do comportamento da pressão e da massa a cada camada esférica concêntrica, este resultado tem pouca utilidade prática, já que representa uma única configuração de estrela estranha.

A principal diferença entre os dois resultados da figura 4.3 é que as pressões centrais são distintas. Isto ocorre porque a relação entre pressão e densidade é dada de maneira distinta nos casos relativístico e ultrarrelativístico. Entretanto, a diferença nos resultados é, de fato, pequena como já fora apontada por Alcock *et al.* (1986) e está em torno de 4%. Isto ocorre porque estamos tratando de quarks leves, e suas massas exercem pouca influência na equação de estado e, consequentemente, nos parâmetros gerais da estrela. Sendo assim, a aproximação ultrarrelativística, extremamente utilizada na literatura, é bastante apropriada no estudo sobre estrelas estranhas.

A fim de obtermos resultados que possam ser comparáveis com as observações de pulsares, devemos averiguar os resultados obtidos para a massa e raio totais, considerando cada valor de p_0. O processo de integração é o mesmo realizado anteriormente, mas agora estamos interessados nos valores finais que correspondem à densidade central predeterminada. Sendo assim, cada ponto nas

Figura 4.3 – Pressão e massa contra o raio, no interior de uma estrela estranha com densidade bariônica central $n_c = 5\,n_0$ e pressão de sacola $B^{1/4} = 155\,\mathrm{MeV}$. A pressão vai de p_0 até $p = 0$, na superfície da estrela, onde obtemos a massa e o raio totais, respectivamente, M e R. As letras minúsculas para massa e raio representam os seus valores no interior da estrela.



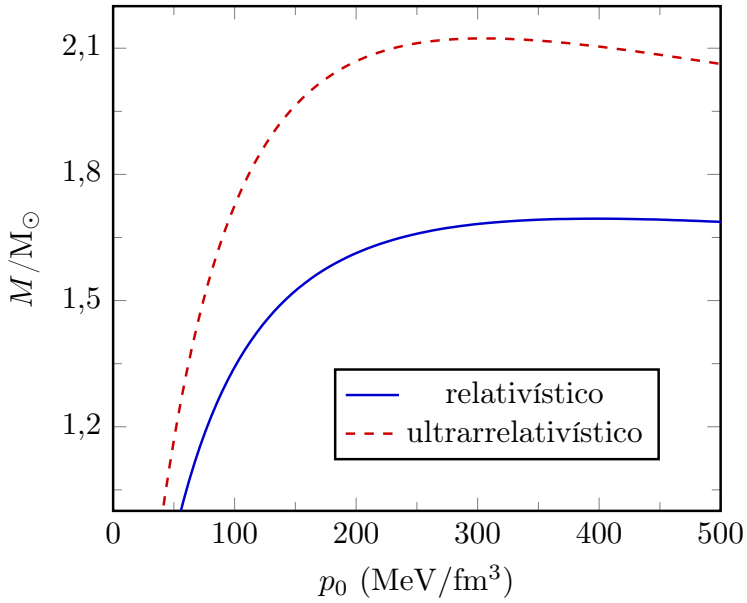
Fonte: o autor (2019)

figuras 4.4 e 4.5 caracteriza uma configuração possível, ou seja, determina para um dado valor de n_c, a massa e o raio da estrela. Todavia, o valor de $B^{1/4} = 155\,\mathrm{MeV}$ é mantido nos dois casos.

Da figura 4.4 podemos analisar a estabilidade das estrelas estranhas, pela condição apresentada na seção 2.2, onde $\mathrm{d}M/\mathrm{d}p_0 > 0$ implica em uma configuração estável. Desta forma, a região de estabilidade de uma estrela estranha, onde o crescimento da pressão central corresponde a um crescimento na massa total da estrela, é tal que $p_0 \leq 396{,}35\,\mathrm{MeV/fm^3}$, levando a uma massa máxima de $1{,}695\,\mathrm{M}_\odot$ para $n_c = 8{,}598\,n_0$, no caso relativístico. No limite ultrarrelativístico, a região de estabilidade corresponde a $p_0 \leq 302{,}71\,\mathrm{MeV/fm^3}$, e uma massa máxima de $2{,}123\,\mathrm{M}_\odot$ para $n_c = 7{,}132\,n_0$. A massa máxima do caso ultrarrelativístico é maior devido ao fato de que quarks sem massa conseguem atingir velocidades maiores, por isso, exercem uma pressão de degenerescência maior e podem suportar pressões gravitacionais mais elevadas, ou equivalentemente, massas maiores.

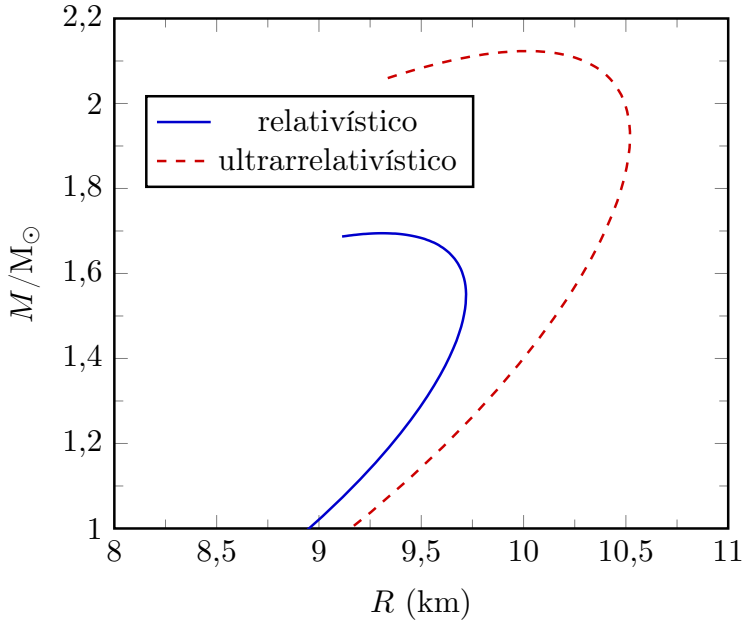
Podemos apenas estimar qual é a pressão no interior de uma estrela, ou seja, não temos como observar e medir tal propriedade. Sendo assim, faz-se necessário um resultado em termos de massa e raio, que são os únicos parâmetros comparáveis com as observações de estrelas deste tipo, já que estamos considerando-as estáticas. Na figura 4.5, podemos ver o perfil massa-raio de estrelas estranhas obtidos numericamente, dentro de nosso modelo. Estes resultados são compatíveis e próximos aos valores típicos encontrados para pulsares, via observação astronômica. No caso ultrarrelativístico, obtemos que a configuração de massa máxima, $M = 2{,}123\,\mathrm{M}_\odot$, contida em um raio de apenas 10,407 km. Enquanto no caso relativístico, $M = 1{,}695\,\mathrm{M}_\odot$ e $R = 9{,}312\,\mathrm{km}$. Estes valores são bastante próximos e coerentes com os pulsares mais densos já observados.

Figura 4.4 – Perfil massa-pressão central nos limites relativístico e ultrarrelativístico. Cada ponto representa uma possível configuração de estrela estranha, para o mesmo valor da pressão de sacola $B^{1/4} = 155\,\mathrm{MeV}$, e para densidades centrais entre $2\,n_0$ e $10\,n_0$.



Fonte: o autor (2019)

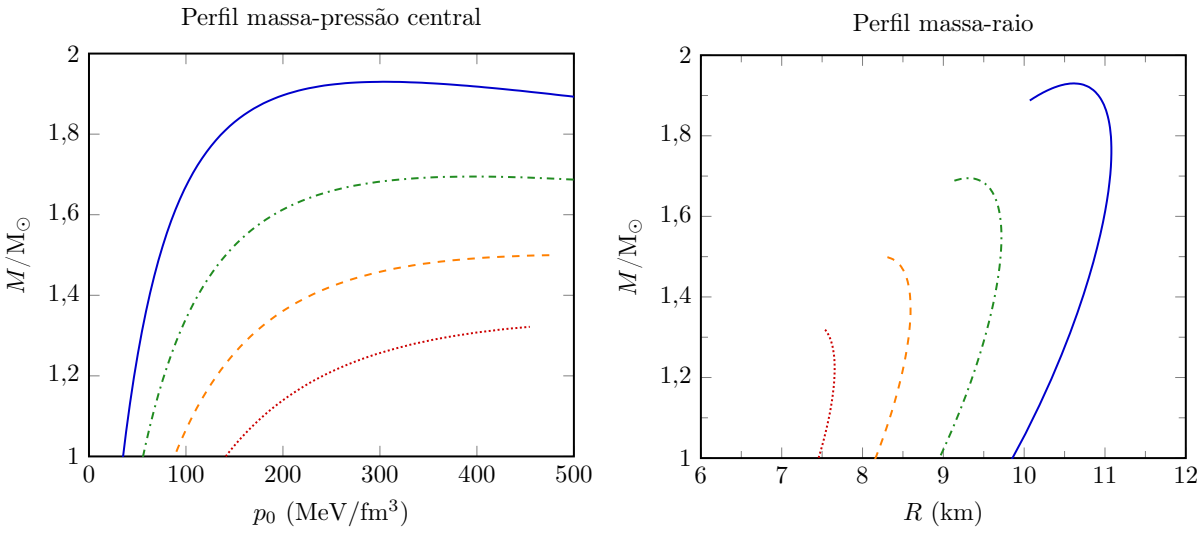
Figura 4.5 – Perfil massa-raio nos limites relativístico e ultrarrelativístico. Considerando $B^{1/4} = 155\,\mathrm{MeV}$ e densidades centrais entre $2\,n_0$ e $10\,n_0$.



Fonte: o autor (2019)

Um aspecto importante na análise de estrelas estranhas é que as configurações onde $M < 1{,}0\,\mathrm{M}_\odot$ são ditas autoligadas (ALCOCK; FARHI; OLINTO, 1986). Isto porque a força de ligação dominante é a força forte, e não a gravitacional. Em outras palavras, a pressão externa que mantém a

Figura 4.6 – Perfis massa-pressão central e massa-raio, respectivamente, no caso relativístico. Para os seguintes valores de B: linha sólida azul ($B^{1/4} = 145\,\text{MeV}$), linha traço-ponto verde ($B^{1/4} = 155\,\text{MeV}$), linha tracejada laranja ($B^{1/4} = 165\,\text{MeV}$) e linha pontilhada vermelha ($B^{1/4} = 175\,\text{MeV}$).



Fonte: o autor (2019)

estrela coesa é a pressão de sacola e não a pressão gravitacional. A atração gravitacional só começa a exercer influência sobre as possíveis configurações para massas maiores que uma massa solar. Por esta razão, nas figuras 4.4, 4.5 e 4.6 só apresentamos os resultados para $M \geq 1{,}0\,\text{M}_\odot$.

Variações nos valores da pressão de sacola B alteram a estrutura e as possíveis configurações de uma estrela estranha composta por um gás de quarks massivos, como pode ser visto na figura 4.6. Esta variação também ocorre com quarks não massivos, porém focaremos no caso relativístico. O aumento em B fortalece a contração da estrela e torna a equação de estado mais rígida, o que implica em massas máximas menores para as configurações correspondentes. Colocado de outra forma, o gás degenerado de quarks exerce a mesma pressão de degenerescência e deve lidar com uma pressão de sacola maior. Portanto, este consegue suportar uma pressão gravitacional menor. Outro efeito visível no aumento da pressão de sacola é a diminuição do raio, tornando a estrela estranha ainda mais compacta. Observações mais precisas nos observáveis – massa e raio – em pulsares candidatos a estrelas estranhas podem aumentar o conhecimento acerca da pressão de sacola e da transição de fase da matéria de quarks para a matéria hadrônica.

O valor de B escolhido para as figuras 4.3, 4.4 e 4.5 está dentro dos limites teóricos (145 MeV e 162,8 MeV) para que a hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa seja válida (WEBER, 1999) e que a SQM seja absolutamente estável em relação ao isótopo ^{56}Fe. Além disso, escolhemos $B^{1/4} = 155\,\text{MeV}$, porque, de acordo com Aziz *et al.* (2019), este valor de B é mais provável do que o limite mínimo de 145 MeV, apresentado na figura 4.6. Os valores de $B^{1/4}$, 165 MeV e 175 MeV, representam uma SQM relativamente estável em relação ao ferro, porém, estão dentro do limite proposto por Aziz, *et al.* (2019), como mostrado na seção 3.3.

4.3 Estrelas híbridas

A título de comparação, faremos uma análise acerca das estrelas híbridas com uma equação de estado simplificada para a fase hadrônica à temperatura zero. Consideramos que a matéria de quarks presente no núcleo da estrela é a SQM (composta por quarks não massivos) e que a transição de fase da matéria hadrônica para a matéria de quarks é de primeira ordem. A equação de estado, que utilizamos para a matéria hadrônica, foi primeiramente apresentada por Baym, Pethick e Sutherland (1971), com a densidade de energia na forma (o subíndice MH indica que estamos tratando de matéria hadrônica)

$$\varepsilon_{\mathrm{MH}}(n) = n\left[\frac{K}{18}\frac{(n-n_0)^2}{n_0^2} + W_0 + W_{\mathrm{sim}} + m_n\right], \tag{4.14}$$

onde $W_0 = -16\,\mathrm{MeV}$ é a energia de ligação por núcleon e $W_{\mathrm{sim}} = 32\,\mathrm{MeV}$ é a energia de simetria, ambas em densidades normais, isto é, $n_0 = 0{,}16\,\mathrm{fm}^{-3}$; $m_N = 939\,\mathrm{MeV}$ é a massa de um núcleon (BAYM; PETHICK; SUTHERLAND, 1971). Enquanto isso, o primeiro termo compreende toda a dependência com a densidade, onde K é a compressibilidade e caracteriza as propriedades da matéria para $n > n_0$. Valores maiores de K implicam em interações mais repulsivas entre núcleons (NYÍRI, 2001). Neste trabalho, utilizamos $K = 170\,\mathrm{MeV}$.

Pela relação termodinâmica entre pressão e densidade de energia, isto é

$$p_{\mathrm{MH}}(n) = n\frac{\partial\varepsilon(n)}{\partial n} - \varepsilon(n)\,, \tag{4.15}$$

a pressão é dada por

$$p_{\mathrm{MH}}(n) = \frac{K}{9}\frac{n^2}{n_0^2}(n-n_0)\,. \tag{4.16}$$

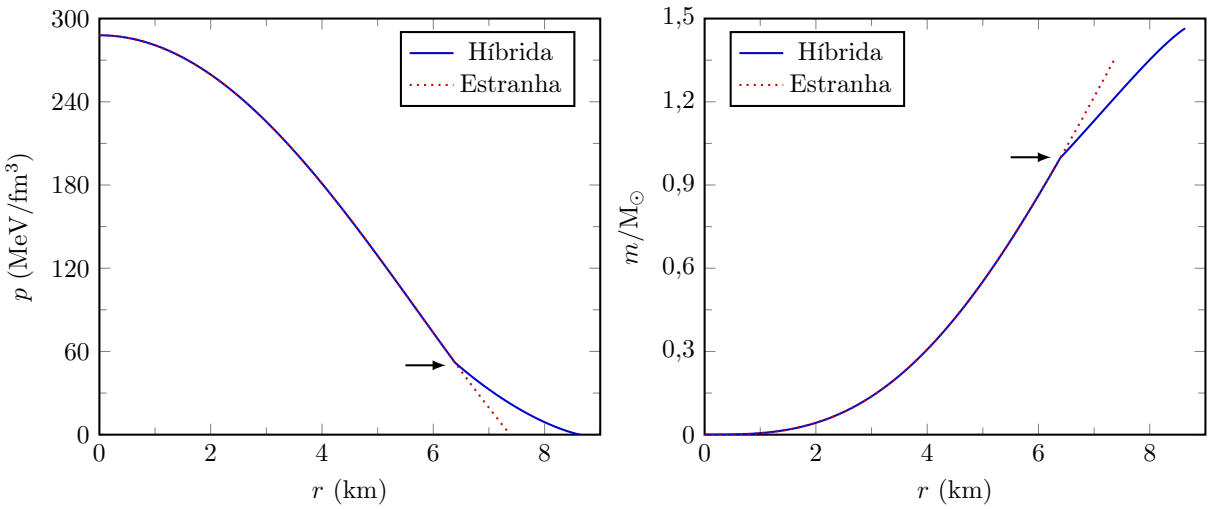
Como p_{MH} e $\varepsilon_{\mathrm{MH}}$ são funções da densidade bariônica n, um simples método para encontrar raízes é suficiente para obtermos uma solução numérica.

No nosso modelo, a densidade crítica, onde ocorrerá a transição de fase da matéria hadrônica para a SQM, é atingida quando a pressão da fase hadrônica é igual à pressão de sacola, ou seja,

$$\frac{K}{9}\frac{n^2}{n_0^2}(n-n_0) = B\,. \tag{4.17}$$

Considerando $B^{1/4} = 185\,\mathrm{MeV}$ e $K = 170\,\mathrm{MeV}$, temos que a densidade crítica é $n^* \simeq 4{,}06\,n_0$. Tomando a densidade central como $n_c = 8{,}0\,n_0$, basta integrarmos a equação TOV até n^* partindo do centro da estrela utilizando a equação de estado para a SQM. Passado n^*, a equação de estado a ser utilizada deve ser a equação hadrônica. Neste caso, as relações pressão-raio e massa-raio no interior da estrela, quando comparadas as mesmas relações da estrela estranha, estão exibidas na figura 4.7. Apesar de ser uma equação de estado simplificada para a matéria hadrônica, podemos ver que a sua presença altera os parâmetros da estrela mudando a curvatura da pressão e da massa em função do raio. Além disso, a massa máxima da estrela híbrida é maior, já que a pressão da SQM decai mais rapidamente nestas baixas densidades quando comparada à fase hadrônica.

Figura 4.7 – Relações pressão-raio e massa-raio, respectivamente, para uma estrela híbrida em comparação com uma estrela estranha composta por quarks não massivos.



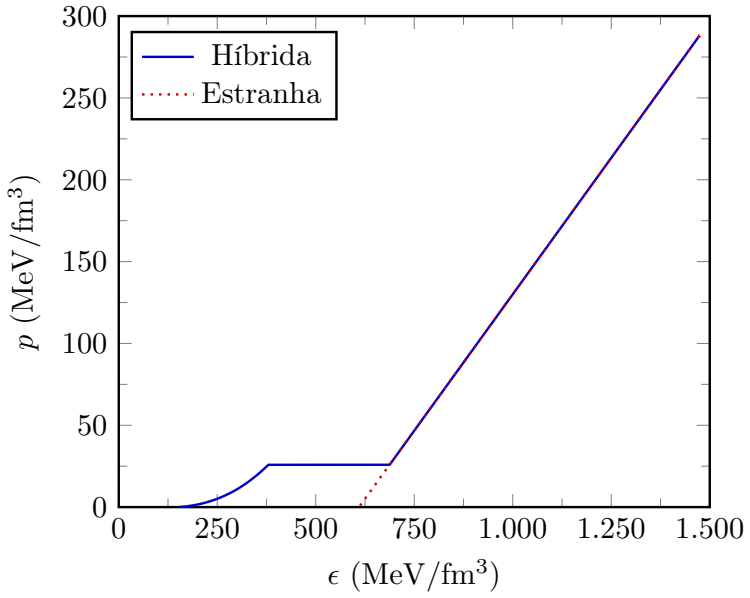
Fonte: o autor (2019)

Na figura 4.8 mostramos a pressão em função da densidade de energia, novamente comparando os dois tipos de estrela e utilizando os mesmos parâmetros que antes, leia-se $B^{1/4} = 185\,\mathrm{MeV}$, $K = 170\,\mathrm{MeV}$ e $n_c = 8{,}0\,n_0$. Vemos claramente que durante a transição de fase, na estrela híbrida, a pressão se mantém constante em função da densidade de energia. Posteriormente, se comporta de acordo com a equação de estado da fase presente. O valor elevado da pressão de sacola, apesar de estar fora tanto do limite teórico quanto do limite proposto por Aziz *et al.* (2019), nos ajuda a visualizar as diferenças das propriedades no momento da transição de fase. Vale ressaltar também que a equação de estado da fase hadrônica é simplificada. Desta forma, estamos tratando um problema extremamente complexo de uma maneira mais simples, a fim de obtermos uma visão geral acerca das mudanças causadas pela crosta nas propriedades de uma estrela estranha.

Mostramos na figura 4.9 as diferenças nas propriedades gerais das estrelas estranhas e híbridas, pelas relações massa-pressão central e massa-raio. Desconsiderando estados ligados, ou seja, considerando apenas as configurações com massas maiores do que uma massa solar, temos que a região de estabilidade da estrela híbrida é ligeiramente maior e se estende entre $114{,}77\,\mathrm{MeV/fm^3} \leq p_0 \leq 597{,}03\,\mathrm{MeV/fm^3}$, com massas correspondentes $M \leq 1{,}506\,\mathrm{M}_\odot$. Enquanto isso, a região de estabilidade da estrela estranha é tal que $137{,}68\,\mathrm{MeV/fm^3} \leq p_0 \leq 602{,}90\,\mathrm{MeV/fm^3}$ e $M \leq 1{,}491\,\mathrm{M}_\odot$. Vale ressaltar que a massa das estrelas híbridas para uma mesma pressão central é maior, novamente, porque a pressão da fase hadrônica decai de forma mais lenta, permitindo a sustentação de mais massa.

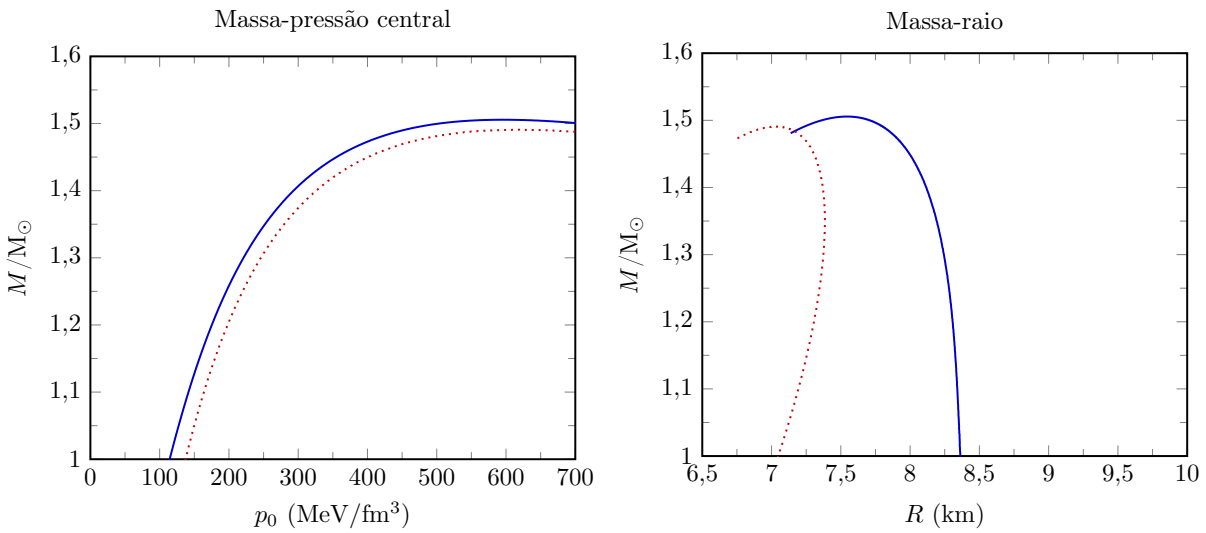
Analisando o perfil massa-raio, vemos que as estrelas híbridas apresentam raios maiores, chegando a um raio máximo de $8{,}362\,\mathrm{km}$, enquanto a estrela estranha obtém $7{,}385\,\mathrm{km}$. Sendo assim, espera-se que estrelas estranhas sejam o estado mais compacto, perdendo em densidade somente para os buracos negros. As massas máximas também diferem, enquanto estrelas híbridas chegam a $1{,}506\,\mathrm{M}_\odot$ para um raio de $7{,}543\,\mathrm{km}$, estrelas estranhas possuem uma massa de $1{,}491\,\mathrm{M}_\odot$

Figura 4.8 – Equação de estado, pressão contra densidade de energia, para $B^{1/4} = 185\,\text{MeV}$ e $K = 170\,\text{MeV}$.



Fonte: o autor (2019)

Figura 4.9 – Relações massa-pressão central e massa-raio, respectivamente, para $B^{1/4} = 185\,\text{MeV}$, $K = 170\,\text{MeV}$ e n_c entre $5\,n_0$ e $15\,n_0$. As curvas que representam a estrela híbrida são as azuis sólidas e as que representam a estrela estranha são as vermelhas pontilhadas.



Fonte: o autor (2019)

contida em um raio de 7,052 km.

Modelos para estrelas de nêutrons e suas diversas faces são amplamente estudados na literatura. Entretanto, não definiu-se ainda qual o estado da matéria dentro das estrelas mais compactas do Universo. Vimos que, apesar de serem uma possível solução, tanto estrelas estranhas quanto híbridas não encerram o assunto e apresentam parâmetros observáveis extremamemente similares.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente TCC possibilitou uma análise acerca das principais características e propriedades das estrelas compactas em geral, com foco nas estrelas estranhas. Além disso, este estudo permitiu uma grande revisão de diversas áreas da física, desde as teorias da gravitação até estados exóticos da matéria presente nas estrelas mais densas do Universo.

As principais implicações da teoria da relatividade geral no nosso conhecimento de objetos massivos e do Universo como um todo foram contrastadas com a lei da gravitação universal de Newton. Mostramos que, apesar de ambas serem capazes de descrever estrelas, a teoria da relatividade geral fornece uma análise mais precisa quando trata-se de objetos densos, onde a gravitação newtoniana se torna insuficiente. Esta diferença foi esclarecida quando apresentamos os resultados para as anãs brancas, mostrando que, nos regimes mais densos, a gravitação newtoniana levava a resultados equivocados. Consequentemente, o formalismo da relatividade geral deve ser empregado ao tratarmos de estrelas de nêutrons e similares, como é o caso das estrelas estranhas.

No capítulo 3 discutimos que, de acordo com o modelo de sacola do MIT, uma nova fase da matéria poderia se fazer presente dentro das estrelas de nêutrons. Pela hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa, o estado fundamental da matéria que interage fortemente é a Matéria Estranha de Quarks, já que apresenta menor energia de ligação que a matéria nuclear ordinária, nos regimes de densidades que podem existir em estrelas de nêutrons. Esta estabilidade absoluta depende do parâmetro fenomenológico da pressão de sacola sendo levada em conta, e é válida para $145\,\mathrm{MeV} \leq B^{1/4} \leq 162{,}8\,\mathrm{MeV}$.

Assumindo a validade da hipótese de Bodmer-Witten-Terazawa, mostramos que uma estrela composta inteiramente pela SQM é uma das possíveis faces para os pulsares observados, já que apresenta parâmetros observáveis – massa e raio – bastante similares. Mais importante ainda, é que estas estrelas são, teoricamente, estáveis. Em um estudo mais aprofundado (KETTNER *et al.*, 1995), mostrou-se que as estrelas estranhas são estáveis a partir de oscilações radiais. Recentemente, outro estudo (WANG; ZHAO; ZONG, 2019) mostrou, utilizando um modelo diferente do modelo de sacola do MIT para descrever a matéria de quarks, que tanto estrelas estranhas quanto estrelas compostas inteiramente por uma matéria de quarks ud livres são estáveis. Além disso, as observações astronômicas não excluem a possibilidade deste tipo de estrela (ZHAO *et al.*, 2019).

A análise das estrelas estranhas utilizando as equações de estado obtidas através do modelo de sacola do MIT, mostrou-se bastante dependente da pressão de sacola. Além de alterar a massa máxima e o raio máximo da estrela, este parâmetro alterou as suas regiões de estabilidade. Na análise das estrelas híbridas, a pressão de sacola, juntamente à compressbilidade, influenciou na densidade crítica, correspondente à transição de fase da matéria hadrônica para a matéria de quarks. Sendo assim, esperamos que observações astronômicas futuras sejam capazes de averiguar com precisão os possíveis valores da pressão de sacola.

A maioria dos pulsares observados até hoje, possuem massa de aproximadamente $1{,}4\,\mathrm{M}_\odot$, contidas em um raio de $10\,\mathrm{km}$. Estes valores estão muito próximos daqueles que obtemos para estrelas estranhas e híbridas e apesar de apresentarem densidades ligeiramente maiores e características

únicas, estas estrelas apresentam propriedades observáveis que estão muito próximas daquelas obtidas para outros tipos de estrelas compactas com densidades similares. Desta forma, definir a matéria contida em um pulsar permanece um dos mais intrigantes problemas da astrofísica moderna. Para uma análise mais precisa, visando separar as estrelas estranhas das demais possibilidades, deve-se considerar a rotação dessa estrela e possível emissão de energia. Os recentes avanços da astronomia de multimensageiros se mostram promissores. Além disso, o início das atividades de novos telescópios, tanto espaciais quanto terrestres, estão previstos para os próximos anos, tornando este um excelente momento para o estudo da astrofísica de objetos compactos.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, B. P. *et al.* GW170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Physical Review Letters**, v. 119, p. 161101, out. 2017.

ACIOLI, J. **Introdução à cinemática relativística**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004.

ALCOCK, C.; FARHI, E.; OLINTO, A. Strange stars. **The Astrophysical Journal**, v. 310, p. 261–272, 1986.

ALFORD, M. G.; HAN, S.; SCHWENZER, K. Signatures for quark matter from multi-messenger observations. **Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics**, IOP Publishing, v. 46, n. 11, p. 114001, oct 2019.

ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. **Physics Letters B**, v. 716, n. 1, p. 1 – 29, 2012.

AZIZ, A. *et al.* Constraining values of bag constant for strange star candidates. **International Journal of Modern Physics D**, World Scientific, v. 28, p. 1941006, abr. 2019.

BAADE, W.; ZWICKY, F. Remarks on super-novae and cosmic rays. **Physical Review**, v. 46, n. 1, p. 76, 1934.

BAYM, G.; PETHICK, C.; SUTHERLAND, P. The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models. **The Astrophysical Journal**, v. 170, p. 299–317, 1971.

BLASZKIEWICZ, L. *et al.* Prospects for scrutiny of pulsars with polish part of lofar. **Acta Geophysica**, v. 64, 2016.

BODMER, A. Collapsed nuclei. **Physical Review D**, New York, v. 4, n. 6, p. 1601–1606, mar. 1971.

BURGARD, C. **Standard Model of particle physics**. 2016. Disponível em: http://www.texample.net/tikz/examples/model-physics/. Acesso em: 27 set. 2019.

CAMENZIND, M. **Compact objects in astrophysics**: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes. Berlin: Springer, 2007.

CARROLL, B. W.; OSTLIE, D. A. **An introduction to modern astrophysics**. 2. ed. San Francisco: Pearson Addison Wesley, 2007.

CHANDRASEKHAR, S. The maximum mass of ideal white dwarfs. **The Astrophysical Journal**, v. 74, n. 2, p. 115–116, jun. 1931.

CHENG, T.-P. **Relativity, gravitation and cosmology**: a basic introduction. New York: Oxford University Press, 2005.

CHEUK-YIN, W. **Introduction to high-energy heavy-ion collisions**. New Jersey: World Scientific, 1994.

CHODOS, A. *et al.* New extended model of hadrons. **Physical Review D**, New York, v. 9, n. 12, p. 3471, mar. 1974.

CMS Collaboration. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. **Physics Letters B**, v. 716, n. 1, p. 30 – 61, 2012.

CROMARTIE, H. *et al.* Relativistic shapiro delay measurements of an extremely massive millisecond pulsar. **Nature Astronomy**, Nature Publishing Group, p. 1–5, 2019.

CROWTHER, P. A. *et al.* The R136 star cluster hosts several stars whose individual masses greatly exceed the accepted 150 $M_\odot$ stellar mass limit. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, The Royal Astronomical Society, v. 408, n. 2, p. 731–751, 2010.

DAS, A. **Lectures on gravitation**. Singapore: World scientific, 2011.

EINSTEIN, A. The foundation of the general theory of relativity. **Annalen der Physik**, v. 49, n. 7, p. 769–822, 1916.

EINSTEIN, A. *et al.* On the electrodynamics of moving bodies. **Annalen der Physik**, Methuen and Company, Ltd London, v. 17, n. 891, p. 50, 1905.

ESA/Hubble. **The Crab nebula**. 1996. Disponível em: https://www.spacetelescope.org/images/opo9622a1/. Acesso em: 25 set. 2019.

FARHI, E.; JAFFE, R. L. Strange matter. **Physical Review D**, New York, v. 30, n. 11, p. 2379, maio 1984.

FAYYAZUDDIN; RIAZUDDIN; ASLAM, M. **Theory of Relativity**. Singapore: World Scientific, 2015.

FOWLER, R. H. On dense matter. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 87, p. 114–122, 1926.

FUNE, E. L. **Strangelets under strong magnetic fields**. 2012. Tese (Master's Degree in Physical Sciences) — ICIMAF, Havana, 2012.

GLENDENNING, N.; WEBER, F. Nuclear solid crust on rotating strange quark stars. **Astrophysical Journal**, v. 400, p. 647–658, 1992.

GLENDENNING, N. K. **Compact stars**: Nuclear physics, particle physics and general relativity. New York: Springer Science & Business Media, 1997.

GLENDENNING, N. K. **Special and general relativity**: With applications to white dwarfs, neutron stars and black holes. New York: Springer Science & Business Media, 2007.

GOLD, T. **Pulsating stars**. New York: Springer, 1968.

GREINER, W.; NEISE, L.; STÖCKER, H. **Thermodynamics and statistical mechanics**. New York: Springer Science & Business Media, 2012.

GRIFFITHS, D. **Introduction to elementary particles**. New York: John Wiley & Sons, 2008.

HALZEN, F.; MARTIN, A. D. **Quark & Leptons**: An introductory course in modern particle physics. New York: John Wiley & Sons, 1984.

HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. **Physical Review Letters**, v. 13, n. 16, p. 508, 1964.

IBEN, I. Stellar Evolution. I. The Approach to the Main Sequence. **The Astrophysical Journal**, v. 141, p. 993–1018, 1965.

JACKSON, C. B. *et al.* Compact objects for everyone: I. white dwarf stars. **European Journal of Physics**, Bristol, v. 26, n. 5, p. 695–709, jun. 2005.

JAFFE, R. Quark confinement. **Nature**, London, v. 268, n. 5617, p. 201, jul. 1977.

KARTTUNEN, H. *et al.* **Fundamental astronomy**. 5. ed. New York: Springer, 2007.

KETTNER, C. *et al.* Structure and stability of strange and charm stars at finite temperatures. **Physical Review D**, APS, v. 51, n. 4, p. 1440, 1995.

KODAMA, T. Introduction to relativistic gases. **AIP Conference Proceedings**, v. 631, n. 1, 2002.

KROUPA, P.; WEIDNER, C. Evidence for a fundamental stellar upper mass limit from clustered star formation, and some implications therof. **Proceedings of the International Astronomical Union**, Cambridge University Press, v. 1, n. S227, p. 423–433, 2005.

LAGERKVIST, L.; SAMUELSSON, F. **The MIT bag-model**: Glueball mass spectrum using the mit bag-model. 2015. Monografia (Bachelor Thesis in Theoretical Physics) — Royal Institute of Technology, Stockholm, 2015.

LONGAIR, M. S. **High Energy Astrophysics**. 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

MANNARELLI, M.; TONELLI, F. Gravitational wave echoes from strange stars. **Physical Review D**, v. 97, p. 123010, jun. 2018.

NEWTON, I. **The Principia**: Mathematical principles of natural philosophy. London: University of California Press, 1999.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**: Mecânica. São Paulo: E. Blucher, 2013. v. 1.

NYÍRI, Á. **Quark-Gluon Plasma in Neutron Stars**. 2001. Tese (M. Phil. Thesis) — University of Bergen, Bergen, 2001.

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On massive neutron cores. **Physical Review**, v. 55, p. 374–381, Feb 1939.

PINOCHET, J.; JAN, M. V. S. Chandrasekhar limit: an elementary approach based on classical physics and quantum theory. **Physics Education**, Bristol, v. 51, n. 3, p. 035007, abr. 2016.

PINOCHET, J.; JAN, M. V. S. How massive can stars be? **Physics Education**, Bristol, v. 52, n. 4, p. 045021, maio 2017.

SAGERT, I. *et al.* Compact stars for undergraduates. **European Journal of Physics**, Bristol, v. 27, n. 3, p. 577–610, abr. 2006.

SCHAFFNER-BIELICH, J. *et al.* Phase transition to hyperon matter in neutron stars. **Physical Review Letters**, New York, v. 89, p. 171101, out. 2002.

SHAPIRO, I. I. Fourth test of general relativity. **Physical Review Letters**, APS, v. 13, n. 26, p. 789, 1964.

SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. **Black holes, white dwarfs, and neutron stars**: The physics of compact objects. Weinheim: Wiley-VCH, 2004.

SPIEGEL, M. R.; LIPSCHUTZ, S.; LIU, J. **Manual de fórmulas e tabelas matemáticas: coleção Schaum**. [S.l.]: Bookman Editora, 2009.

SZKUDLAREK, M. *et al.* Maximum mass of differentially rotating strange quark stars. **arXiv**, Ithaca, abr. 2019. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1904.03759.pdf. Acesso em: 02 jun. 2019.

TAYLER, R. J. **The stars**: Their structure and evolution. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

TERAZAWA, H. Super-hypernuclei in the quark-shell model. **Journal of the Physical Society of Japan**, Tokyo, v. 58, n. 10, p. 3555–3563, 1989.

The EHT Collaboration *et al.* First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 875, p. 4, 2019.

THOMSON, M. **Modern particle physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TOLMAN, R. C. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. **Physical Review**, v. 55, p. 364–373, Feb 1939.

WANG, Q.; ZHAO, T.; ZONG, H. On the stability of two-flavor and three-flavor quark stars. **arXiv**, Ithaca, 2019. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1908.01325. Acesso em: 25 out. 2019.

WEBER, F. **Pulsars as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics**. London: Institute of Physics, 1999.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**: Principles and applications of the general theory of relativity. New Dehli: Wiley India Pvt. Limited, 2008.

WILSON, K. G. Confinement of quarks. **Physical review D**, New York, v. 10, n. 8, p. 2445, 1974.

WITTEN, E. Cosmic separation of phases. **Physical Review D**, New York, v. 30, n. 2, p. 272–285, jul. 1984.

WOLTJER, L. X-Rays and Type I Supernova Remnants. **The Astrophysical Journal**, v. 140, p. 1309–1313, 1964.

YUKAWA, H. On the interaction of elementary particles. i. **Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series**, THE PHYSICAL SOCIETY OF JAPAN, The Mathematical Society of Japan, v. 17, p. 48–57, 1935.

ZETTILI, N. **Quantum mechanics**: concepts and applications. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2009.

ZHAO, T. *et al.* Do current astronomical observations exclude the existence of nonstrange quark stars? **Physical Review D**, New York, v. 100, n. 4, p. 043018, 2019.

ZHOU, E. *et al.* Differentially rotating strange star in general relativity. **arXiv**, Ithaca, fev. 2019. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1902.09361.pdf. Acesso em: 1 jun. 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A – UNIDADES

Neste apêndice, mostramos os sistemas de unidades mais comuns no estudo de estrelas compactas. Em um primeiro momento, mostramos os valores do ponto de vista astronômico. Posteriormente, apresentamos o sistema de unidades naturais e as formas que a serem utilizadas no decorrer deste texto.

A.1 Unidades astronômicas

Na descrição de uma estrela é comum usarmos o Sol como referência. Por exemplo, comparamos as massas das estrelas com a massa do Sol, sua luminosidade com a do Sol, e assim por diante. Os valores referentes ao Sol estão apresentados na tabela tabela A.1.

Tabela A.1 – Valores referentes ao Sol, utilizados como referência no decorrer do texto.

Propriedade	Símbolo	Valor no SI
Massa	$M_\odot$	$1{,}989 \times 10^{30}$ kg
Luminosidade	$L_\odot$	$5{,}93 \times 10^{26}$ W
Raio	$R_\odot$	$6{,}960 \times 10^{8}$ km
Temperatura efetiva	T_e	5785 K

Fonte: Adaptada de (KARTTUNEN *et al.*, 2007, p.447)

Outra unidade comum que utilizaremos no texto é a unidade astronômica, simbolizada por ua. Esta unidade representa a distância da Terra ao Sol, tal que $1\,\text{ua} \simeq 1{,}5 \times 10^{8}\,\text{km}$.

A.2 Unidades naturais

Para trabalhar com física de partículas, as unidades presentes no Sistema Internacional (SI) não são as mais convenientes, pois os valores cotidianos são elevados demais nessas escalas. Desta forma, é usual utilizar-se o chamado sistema de unidades naturais, definidos a partir de $\hbar = c = k_B = 1$, com $\hbar = h/2\pi$ onde h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz no vácuo e k_B é a constante de Boltzmann. Assim, todas as propriedades de interesse, como a massa das partículas e a temperatura, são expressas em termos de energia. A unidade de energia mais conveniente é o elétron-volt e os seus respectivos múltiplos. Normalmente, utiliza-se o GeV ($= 10^9$ eV). Os fatores de conversão entre as unidades escritas no SI para o sistema natural de unidades estão apresentados na tabela A.2. Uma consequência direta desse sistema de unidades é que a relação de de Broglie, dada por $p = \hbar k$, onde p é o *momentum* linear e k é o número de onda, se torna $p = k$. Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), k possui unidades de *momentum* linear, que em unidades naturais é GeV, e será referido simplesmente como *momentum*.

Todas as equações apresentadas no texto estão em unidades naturais. Nesse sistema de unidades, temos que pressão e densidade de energia são medidos em GeV^4, enquanto no SI são

Tabela A.2 – Fatores de conversão das unidades do SI para as unidades naturais.

Fator de conversão	Unidades naturais ($\hbar = c = 1$)	Dimensão verdadeira
1 kg $= 5{,}61 \times 10^{26}$ GeV	GeV	GeV$/c^2$
1 m $= 5{,}07 \times 10^{15}$ GeV^{-1}	GeV^{-1}	$\hbar c/$GeV
1 s $= 1{,}52 \times 10^{24}$ GeV^{-1}	GeV^{-1}	$\hbar/$GeV
1 K $= 8{,}62 \times 10^{-14}$ GeV	GeV	GeV$/k_B$

Fonte: Adaptada de Halzen (1984, p.13).

Nota: Vale notar que 1 eV $= 1 \times 10^{-3}$ KeV $= 1 \times 10^{-6}$ MeV $= 1 \times 10^{-9}$ GeV.

dados em J/m^3. Como a conversão de fentômetro (fm $= 1 \times 10^{-15}$ m) para GeV é direta e dada por 1 fm $= 5{,}07$ GeV^{-1}, faremos uso alternado, porém explícito, do sistema natural para a unidade de pressão e densidade de energia escrita como GeV/fm^3. Apresentaremos a densidade bariônica em termos de fm^{-3}. Além disso, nos resultados apresentaremos o raio da estrela em km e sua massa em unidades de $M_\odot$.

A.3 Unidades geométricas

As unidades geométricas são uma variação das unidades naturais, definidas a partir de $G = c = 1$, onde G é a constante gravitacional e as grandezas físicas são escritas com dimensões geométricas de comprimento, área, volume e suas respectivas densidades.

APÊNDICE B – DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO TOV

A equação TOV é derivada a partir das equações de Einstein para o campo gravitacional (OPPENHEIMER; VOLKOFF, 1939; TOLMAN, 1939), discutidas na seção 2.1, e dadas por (em unidades geométricas)

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} \,. \tag{B.1}$$

O tensor métrico, presente no tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, pode ser obtido a partir do elemento de linha, que para uma estrela esfericamente simétrica e estática é dado por

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\nu(r)}\mathrm{d}t^2 - e^{2\lambda(r)}\mathrm{d}r^2 - r^2[\mathrm{d}\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2] \,, \tag{B.2}$$

tal que, com $\nu \equiv \nu(r)$ e $\lambda \equiv \lambda(r)$ temos

$$g_{00} = e^{2\nu} \,;\, g_{11} = -e^{2\lambda} \,;\, g_{22} = -r^2 \,;\, g_{33} = -r^2 \operatorname{sen}^2\theta \,. \tag{B.3}$$

Os símbolos de Christoffel são definidos a partir da métrica, tal que

$$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\alpha}\left(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right) \,. \tag{B.4}$$

Como o tensor métrico é diagonalizado, só temos termos não nulos quando $\gamma = \alpha$, assim

$$\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\gamma\gamma}\left(\partial_\mu g_{\gamma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}\right) \,, \tag{B.5}$$

o que resulta nos seguintes termos não nulos

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \nu' \,, && \Gamma^1_{00} = \nu' e^{2(\nu-\lambda)} \,, && \Gamma^1_{11} = \lambda' \,, \\
&\Gamma^1_{22} = -r e^{-2\lambda} \,, && \Gamma^1_{33} = -r \operatorname{sen}^2\theta e^{-2\lambda} \,, && \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \,, \\
&\Gamma^2_{33} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta \,, && \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \,, && \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta \,,
\end{aligned}$$

onde a linha denota a derivada parcial com relação à r.

O tensor da curvatura de Riemann, na sua forma covariante, pode ser obtido a partir dos símbolos de Christoffel, sendo dado por

$$\begin{aligned}
R_{\delta\gamma\mu\nu} &= g_{\delta\mu} R^{\alpha}_{\gamma\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\gamma\partial_\mu g_{\delta\nu} + \partial_\delta\partial_\nu g_{\delta\mu} - \partial_\delta\partial_\mu g_{\gamma\nu}) + g_{\beta\eta}(\Gamma^{\beta}_{\gamma\mu}\Gamma^{\eta}_{\delta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\gamma\nu}\Gamma^{\eta}_{\delta\mu}) \,.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Portanto, o tensor de Ricci, que é definido por

$$R_{\gamma\mu} = g^{\delta\nu} R_{\delta\mu\gamma\nu} \,, \tag{B.7}$$

possui as seguintes componentes diagonais (as restantes são nulas por causa do tensor métrico):

$$R_{00} = g^{00} R_{0000} + g^{11} R_{1001} + g^{22} R_{2002} + g^{33} R_{3003} \,, \tag{B.8}$$

onde

$$R_{0000} = 0 \,, \tag{B.9}$$

$$R_{1001} = R_{0110} = (\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda')e^{\nu} \,, \tag{B.10}$$

$$R_{2002} = R_{0220} = r\nu' e^{2(\nu-\lambda)} \,, \tag{B.11}$$

$$R_{3003} = R_{0330} = r\,\mathrm{sen}^2\theta\,\nu' e^{2(\nu-\lambda)} \,, \tag{B.12}$$

logo,

$$R_{00} = \left(\nu'' - \nu'^2 + \nu'\lambda' - 2\frac{\nu'}{r}\right) e^{2(\nu-\lambda)} \,; \tag{B.13}$$

a segunda componente

$$R_{11} = g^{00}R_{0110} + g^{11}R_{1111} + g^{22}R_{2112} + g^{33}R_{3113} \,, \tag{B.14}$$

com R_{0110} já calculado, temos

$$R_{1111} = 0 \,, \tag{B.15}$$

$$R_{2112} = R_{1221} = r\lambda' \,, \tag{B.16}$$

$$R_{3113} = R_{1331} = r\,\mathrm{sen}^2\theta\,\lambda' \,, \tag{B.17}$$

logo,

$$R_{11} = \nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' - 2\frac{\lambda'}{r} \,; \tag{B.18}$$

a terceira componente

$$R_{22} = g^{00}R_{0220} + g^{11}R_{1221} + g^{22}R_{2222} + g^{33}R_{3223} \,, \tag{B.19}$$

com R_{0220} e R_{1221} já calculados e $R_{2222} = 0$, temos

$$R_{3223} = R_{2332} = r^2\,\mathrm{sen}^2\theta(1 - e^{-2\lambda}) \,, \tag{B.20}$$

assim

$$R_{22} = (r\nu' - r\lambda' + 1)e^{-2\lambda} - 1 \,; \tag{B.21}$$

por fim,

$$R_{33} = g^{00}R_{0330} + g^{11}R_{1331} + g^{22}R_{2332} + g^{33}R_{3333} \,, \tag{B.22}$$

como $R_{3333} = 0$ e com os outros coeficientes já calculados anteriormente, chegamos a

$$R_{33} = R_{22}\,\mathrm{sen}^2\theta = [(r\nu' - r\lambda' + 1)e^{-2\lambda} - 1]\,\mathrm{sen}^2\theta \,. \tag{B.23}$$

A partir do tensor de Ricci, somos capazes de determinar o escalar de Ricci, tal que

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \,, \tag{B.24}$$

o que fornece

$$R = 2\left(-\nu'' - \nu'^2 + \nu'\lambda' - 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) e^{-2\lambda} + \frac{2}{r^2} \,. \tag{B.25}$$

Assim, podemos obter o lado esquerdo das equações de Einstein, isto é, o tensor de Einstein, que na sua forma mista é dado por

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu} R \,, \tag{B.26}$$

onde δ^{μ}_{ν} é a delta de Kronecker, que possui valor igual a um quando $\mu = \nu$ e zero para $\mu \neq \nu$. Portanto, temos

$$G^{0}_{0} = \left(\frac{1}{r^2} - 2\frac{\lambda'}{r}\right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} \,, \tag{B.27}$$

$$G^{1}_{1} = \left(\frac{1}{r^2} + 2\frac{\nu'}{r}\right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} \,, \tag{B.28}$$

$$G^{2}_{2} = G^{3}_{3} = \left(\nu'' + \nu'^2 - \nu'\lambda' + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right) e^{-2\lambda} \,. \tag{B.29}$$

O lado direito da equação de Einstein é obtido ao considerarmos que a estrela é composta por um fluido ideal e isotrópico, sendo assim, o tensor energia-*momentum* na sua forma mista é escrito

$$T^{\mu}_{\nu} = (\varepsilon + p) u^{\mu} u_{\nu} - p\delta^{\mu}_{\nu} \,, \tag{B.30}$$

onde u^{μ} é o quadrivetor velocidade ou quadrivelocidade do fluido. Desta forma, no referencial de repouso do fluido $u^{\mu} = (1,0,0,0)$. Por isso, temos

$$T^{0}_{0} = \varepsilon \,,\, T^{1}_{1} = T^{2}_{2} = T^{3}_{3} = -p \,. \tag{B.31}$$

Em posse dos tensores G^{μ}_{ν} e T^{μ}_{ν}, pela equação (B.1) obtemos as seguintes relações

$$\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} = -8\pi\varepsilon(r) \,, \tag{B.32}$$

$$\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r}\right) e^{-2\lambda} - \frac{1}{r^2} = 8\pi p(r) \,, \tag{B.33}$$

$$\left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r}\right) e^{-2\lambda} = 8\pi p(r) \,. \tag{B.34}$$

Podemos relacionar $e^{2\lambda}$ com a massa da estrela já que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\left(1 - e^{-2\lambda}\right)\right] = 1 - e^{-2\lambda} + 2r\lambda' e^{-2\lambda} \,, \tag{B.35}$$

o que, multiplicando os dois lados da equação por r^{-2}, resulta em

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\left(1 - e^{-2\lambda}\right)\right] = -\left[e^{-2\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\right] \,. \tag{B.36}$$

Assim, pela equação (B.32), temos

$$8\pi\varepsilon(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\left(1 - e^{-2\lambda}\right)\right] \,, \tag{B.37}$$

ou, multiplicando por r^2 e integrando, temos

$$8\pi \int_0^r r'^2 \varepsilon(r') \mathrm{d}r' = r(1 - e^{-2\lambda}) \,. \tag{B.38}$$

Isolando $e^{-2\lambda}$ temos

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{8\pi}{r}\int_0^r r'^2 \varepsilon(r')\mathrm{d}r' \,. \tag{B.39}$$

Como a relação entre massa e raio no interior da estrela é descrita por

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2 \varepsilon(r)\,, \tag{B.40}$$

que na sua forma integral fica

$$m(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \varepsilon(r')\mathrm{d}r'\,, \tag{B.41}$$

podendo ser associada com a equação (B.42), tal que

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} . \tag{B.42}$$

Ainda pela equação (B.32), podemos isolar λ', o que resulta em

$$\lambda' = \frac{1}{2r}\left\{1 - e^{2\lambda}\left[1 - 8\pi r^2 \varepsilon(r)\right]\right\} . \tag{B.43}$$

Na equação (B.33), podemos isolar ν', obtendo

$$\nu' = \frac{1}{2r}\left\{e^{2\lambda}\left[8\pi r^2 p(r) + 1\right] - 1\right\} . \tag{B.44}$$

A fim de resolvermos equação (B.34), devemos calcular, a partir da equação (B.44), ν'^2 e ν'', além do produto $\nu'\lambda'$ e da diferença $(\nu' - \lambda')/r$. Após cálculos diretos, porém longos, chegamos aos seguintes resultados:

$$\nu'^2 = e^{4\lambda}\left[16\pi^2 r^2 p^2(r) + 4\pi p(r) + \frac{1}{4r^2}\right] - e^{2\lambda}\left[4\pi p(r) + \frac{1}{2r^2}\right] + \frac{1}{4r^2}\,, \tag{B.45}$$

$$\begin{aligned}\nu'' = {} & e^{4\lambda}\left[32\pi^2 r^2 \varepsilon(r) p(r) + 4\pi\varepsilon(r) - 4\pi p(r) - \frac{1}{2r^2}\right] + \\ & + e^{2\lambda}\left[4\pi r p'(r) + 8\pi p(r)\right] + \frac{1}{2r^2}\,,\end{aligned} \tag{B.46}$$

$$\begin{aligned}\nu'\lambda' = {} & e^{4\lambda}\left[16\pi^2 r^2 p(r)\varepsilon(r) + 2\pi\varepsilon(r) - 2\pi p(r) - \frac{1}{4r^2}\right] + \\ & + e^{2\lambda}\left[2\pi p(r) - 2\pi\varepsilon(r) + \frac{1}{2r^2}\right] - \frac{1}{4r^2}\,,\end{aligned} \tag{B.47}$$

$$\frac{\nu' - \lambda'}{r} = e^{2\lambda}\left[4\pi p(r) - 4\pi\varepsilon(r) + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{1}{r^2}\,. \tag{B.48}$$

Substituindo os resultados acima na equação (B.34), agrupando os termos e simplificando-os, temos

$$\{e^{2\lambda}[8\pi r^2 p(r) + 1] - 1\}[\varepsilon(r) + p(r)] + 2r\,p'(r) = 0\,. \tag{B.49}$$

Isolando $p'(r) = \mathrm{d}p/\mathrm{d}r$ e utilizando o resultado obtido na equação (B.42), finalmente, chegamos à equação TOV em unidades geométricas, dada por

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{m(r)\varepsilon(r)}{r^2}\left[1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right]\left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)}\right]\left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-1} . \tag{B.50}$$

APÊNDICE C – GÁS IDEAL DE FERMI COMPLETAMENTE DEGENERADO

A fim de descrever um gás relativístico completamente degenerado, leia-se à temperatura zero, podemos fazer uso do *ensemble* grande canônico, cuja função de partição Z é dada por (em unidades naturais)

$$Z(V,\beta,\mu) = \sum_{\alpha} e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)}\,, \tag{C.1}$$

onde V representa o volume ocupado pelo gás, $\beta = 1/T$, onde T é a temperatura, μ é o potencial químico. Além disso, E_α e N_α são, respectivamente, a energia e o número de partículas no microestado α (KODAMA, 2002; GREINER; NEISE; STÖCKER, 2012).

Tratando-se de um gás de férmions ideal, cada microestado α estará ocupado por η_i partículas. Pelo princípio da exclusão de Pauli, cada estado i deve ser ocupado ou desocupado, logo i é igual a um ou zero. Portanto, a função de partição é dada por

$$\begin{aligned}
Z(V,\beta,\mu) &= \sum_{\alpha} e^{-\beta(E_\alpha - \mu N_\alpha)} && \text{(C.2)}\\
&= \sum_{\eta_1}\sum_{\eta_2}\cdots\sum_{\eta_i}\cdots \exp\left\{-\beta\sum_i \eta_i(\varepsilon_i - \mu)\right\} && \text{(C.3)}\\
&= \prod_i \sum_{\eta_i=0,1} \exp\{-\beta\eta_i(\varepsilon_i-\mu)\} && \text{(C.4)}\\
&= \prod_i \left\{1 + e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}\right\} && \text{(C.5)}\\
&= \exp\sum_i \ln\left[1 + e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}\right]. && \text{(C.6)}
\end{aligned}$$

Tomando cada estado de partícula única i para um gás ideal como ocupado por estado de onda plana com *momentum* $\mathbf{k}$, podemos substituir o somatório sobre estados na equação (C.2) por uma integral em $\mathbf{k}$,

$$\sum_i \to \frac{\gamma V}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\,, \tag{C.7}$$

onde γ é o fator de degenerescência, e depende do tipo de partícula em questão. Realizando a substituição acima na equação (C.2) obtemos

$$\ln Z(V,\beta,\mu) = \frac{\gamma V}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \ln\left[1 + e^{-\beta(E_k-\mu)}\right], \tag{C.8}$$

onde E_k é a energia do estado com *momentum* $\mathbf{k}$.

No limite termodinâmico ($V\to\infty, N\to\infty, V/N\to \text{constante}$), podemos obter as propriedades do sistema, isto é, a média da energia interna e o número médio de partículas, a partir das relações termodinâmicas (KODAMA, 2002; GREINER; NEISE; STÖCKER, 2012)

$$\langle E\rangle = -\left.\frac{\partial \ln Z}{\partial\beta}\right|_{\mu\beta}, \tag{C.9}$$

$$\langle N\rangle = \frac{1}{\beta}\left.\frac{\partial \ln Z}{\partial\mu}\right|_{\beta}. \tag{C.10}$$

Definindo $\langle N \rangle / V \equiv n$ e $\langle E \rangle / V \equiv \varepsilon$, que são, respectivamente, a densidade de partículas e a densidade de energia, obtemos pelas equações (C.2) e (C.10)

$$n = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 k \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1} \,. \tag{C.11}$$

E pelas equações (C.2) e C.9 chegamos a

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 k \frac{E_k \, e^{-\beta(E_k - \mu)}}{1 + e^{-\beta(E_k - \mu)}} \\ &= \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3 k \frac{E_k}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1} \,. \end{aligned} \tag{C.12}$$

As equações (C.11) e (C.12) mostram a média do número de ocupação para o nível de energia E_k no gás de Fermi (KODAMA, 2002; GREINER; NEISE; STÖCKER, 2012), e é chamada de função de distribuição de Fermi-Dirac, sendo dada por

$$f(E_k) = \frac{1}{e^{\beta(E_k - \mu)} + 1} \,. \tag{C.13}$$

Todas as estrelas consideradas neste TCC, são compostas por gases relativísticos, onde cada nível de energia é dado pela relação

$$E_k = \sqrt{k^2 + m^2} \,, \tag{C.14}$$

onde m é a massa da partícula. Desta forma, as densidades de energia e de partícula são dadas por

$$n = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}k \, k^2 f(E_k) \,, \tag{C.15}$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}k \, k^2 \sqrt{k^2 + m^2} \, f(E_k) \,, \tag{C.16}$$

onde utilizamos $\mathrm{d}^3 k = 4\pi k^2 \mathrm{d}k$, devido à simetria esférica do *momentum*. Além disso, a função de distribuição passa a ser

$$f(E_k) = \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{k^2 + m^2} - \mu)} + 1} \,. \tag{C.17}$$

Quando consideramos o caso completamente degenerado, ou seja, que o gás está à temperatura zero ($\beta \to \infty$), a função de distribuição passa a ser uma função degrau (SAGERT *et al.*, 2006). Isto ocorre porque para $\mu \geq \sqrt{k^2 + m^2}$ a função tem valor unitário, e para $\mu < \sqrt{k^2 + m^2}$ a exponencial tende a valores muito altos, e a função se anula. Sendo assim, podemos escrever

$$f(\mu) = \begin{cases} 1, \text{ se } \mu \geq E_F \\ 0, \text{ se } \mu < E_F \,, \end{cases}$$

onde $E_F = \sqrt{k_F^2 + m^2}$. Em outras palavras, todos os estados de energia até a energia E_F estão ocupados, enquanto que os estados com energia acima de E_F estão vazios. Desta forma, a densidade de partículas na estrela fica

$$n = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \mathrm{d}k \, k^2 = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \,. \tag{C.18}$$

A densidade de energia resulta em

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\gamma}{2\pi^2}\int_0^{k_F} \mathrm{d}k\, k^2\sqrt{k^2+m^2} \\ &= \frac{\gamma m^4}{2\pi^2}\int_0^{k_F/m} \mathrm{d}x\, x^2\sqrt{x^2+1} \\ &= \frac{\gamma m^4}{16\pi^2}\left[(2x^3+x)(1+x^2)^{1/2} - \operatorname{senh}^{-1}(x)\right], \end{aligned} \tag{C.19}$$

onde $x = k_F/m$.

Como estamos considerando um sistema com distribuição isotrópica de *momentum*, a pressão pode ser obtida através de (SAGERT *et al.*, 2006)

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}\frac{\gamma}{2\pi^2}\int_0^{k_F} \mathrm{d}k \frac{k^4}{E_k} \\ &= \frac{\gamma}{6\pi^2}\int_0^{k_F} \mathrm{d}k \frac{k^4}{\sqrt{k^2+m^2}} \\ &= \frac{\gamma m^4}{6\pi^2}\int_0^{k_F/m} \mathrm{d}x \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\gamma m^4}{48\pi^2}\left[(2x^3-3x)(1+x^2)^{1/2} + 3\operatorname{senh}^{-1}(x)\right]. \end{aligned} \tag{C.20}$$

Para partículas de spin 1/2, $\gamma = 2$ corresponde aos dois estado de spin, o que é válido para elétrons e nêutrons. As expressões (C.18), (C.19) e (C.20) são as mesmas utilizadas nas subseções 2.4.2 e 2.4.3, onde as partículas eram elétrons e nêutrons, respectivamente. Porém, no caso das anãs brancas levamos em consideração a energia de repouso dos núcleons adicionando mais um termo à densidade de energia (SAGERT *et al.*, 2006).

As mesmas expressões também foram utilizadas no gás de quarks, porém, escrevemos $\operatorname{senh}^{-1}(x)$ na forma (SPIEGEL; LIPSCHUTZ; LIU, 2009)

$$\operatorname{senh}^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right). \tag{C.21}$$

Além disso, introduzimos *ad hoc* a pressão de sacola B por conta do modelo de sacola do MIT, como também dividimos a equação (C.18) por três, a fim de representar a densidade bariônica, já que cada bárion contem três quarks. Desta forma, a pressão e as densidades de energia e bariônica para um gás de quarks no modelo de sacola do MIT são dadas por

$$p = -B + \sum_f \frac{1}{4\pi^2}\left[\mu_f k_f\left(\mu_f^2 - \frac{5}{2}m_f^2\right) + \frac{3}{2}m_f^4 \ln\left(\frac{\mu_f + k_f}{m_f}\right)\right], \tag{C.22}$$

$$\varepsilon = B + \sum_f \frac{3}{4\pi^2}\left[\mu_f k_f\left(\mu_f^2 - \frac{1}{2}m_f^2\right) - \frac{1}{2}m_f^4 \ln\left(\frac{\mu_f + k_f}{m_f}\right)\right], \tag{C.23}$$

$$n = \sum_f \frac{k_f^3}{3\pi^2}, \tag{C.24}$$

onde $\mu_f = \sqrt{k_f^2 + m_f^2}$ e o fator $\gamma = 6$, já que quarks possuem a carga de cor (três cores possíveis) além dos dois estados de spin, está incluso. Os somatórios com índice f representam a soma sobre cada sabor de quark presente no gás.

Quando consideramos o limite ultrarrelativístico, ou seja, desprezamos a massa dos quarks ($m_f \approx 0$), obtemos a igualdade entre o potencial químico e o momento de Fermi. Consequentemente, as equações (C.22), (C.23) e (C.24) tomam a forma

$$p = -B + \sum_f \frac{\mu_f^4}{4\pi^2}\,, \tag{C.25}$$

$$\varepsilon = B + \sum_f \frac{3\,\mu^4}{4\pi^2}\,, \tag{C.26}$$

$$n = \sum_f \frac{\mu_f^3}{3\pi^2}\,, \tag{C.27}$$

que foram as equações de estado utilizadas no limite ultrarrelativístico na seção 3.2.

APÊNDICE D – SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo iremos apresentar os programas feitos para a obtenção dos dados utilizados na produção dos gráficos. Está comentado no início de cada programa quais dados ele obtem, e se está associado a uma estrela estranha (especificando o caso relativístico ou ultrarrelativístico) ou a uma estrela híbrida.

As unidades que estão apresentadas no lado direito dos parâmetros e variáveis são as utilizadas nos cáculos dos programas. As unidades escritas nos arquivos, consequentemente, utilizadas nos gráficos, estão explicitadas do lado direito dos comandos “write” e “print”. A subrotina “newton” se refere aos método Newton-Raphson para encontrar raízes de funções.

Programa 1 – Utilizado para gerar os dados do limite ultrarrelativístico (curvas vermelhas pontilhadas) na figura 4.3. Também utilizado para representar a estrela estranha (curvas vermelhas pontilhadas) nas figuras 4.7 e 4.8.

```
!ESTRELA ESTRANHA
!Limite ultrarrelativístico (quarks sem massa)
!Programa para calcular a massa e a pressão como funções do raio, do centro da estrela até a a superfície, onde p = 0. Neste ponto, o programa para, imprimindo o raio total e a massa total da estrela na tela.
PROGRAM quarkstar
  IMPLICIT NONE
  !pi, velocidade da luz no vácuo, constante reduzida de Planck
  REAL, PARAMETER :: pi = 4.*atan(1.0), c = 2.99792458d23, hbar = 6.58211915d-25 ![c] = fm/s, [hbar] = GeV.s
  !R0 = G*Msol/c^2 // G = 6.67408d-11, Msol = 1.989d30 ![G] = m^3kg^-1s^-2, [Msol] = kg
  REAL, PARAMETER :: R0 = 1.47611 !km
  !M0 = 10^54/(6,242d9*Msol*c**2) !incluindo a conversão de m^3 para fm^3
  REAL, PARAMETER :: M0 = 8.9616d-4 !GeV
  !pressão de sacola
  REAL, PARAMETER :: B = 0.185**4 !GeV^4
  !densidade bariônica nuclear
  REAL, PARAMETER :: n0 = 1.2277d-3 !GeV^3 // n0 = 0.16 fm^-3
  !raio, passo do raio
  REAL :: r, dr = 1d-3 !km
  !massa // mi evita a divisão por zero na equação TOV
```

```
  REAL :: m, mi = 1d-3 !Msol
  !pressão, densidade de energia
  REAL :: p, e  !GeV^4
  !densidade bariônica, densidade bariônica central
  REAL :: n, nc !GeV^3
10 format(E14.7, 1x, E14.7, 1x, E14.7, 1x, E14.7) !formato de impressão
11 format(1x, A, 14x, A, 14x, A, 14x, A)

  !condições iniciais
  nc = 8*n0
  n = nc
  p = 3*pi**(2/3.)*n**(4/3.)/4. - B
  e = 3*p + 4*B
  r = 0d0
  m = 0d0

  OPEN(10, FILE = 'MQ-mpXrn.dat') !arquivo gerado pelo programa
  WRITE(10,11) 'r', 'p', 'm', 'e'
  WRITE(10,10) r, p*1d3/(hbar*c)**3, m, e*1d3/(hbar*c)**3 ![r] = km, [p] = MeV/fm^3, [m] = Msol
  DO WHILE (p > 0d0)
     r = r + dr !variável de integração
     p = -R0*e*m*dr/(r**2.)*(1.+p/e)*(1.+4.*pi*r**3.*p*M0/mi)/(1.-2.*R0*m/r) + p !integração da TOV
     m = 4.*pi*r**2.*e*dr*M0/((hbar*c)**3) + m !integração da massa
     mi = m
     e = 3*p + 4*B !equação de estado
     !n = (4*(p+B)/(3*pi**(2/3.)))**(3/4.) !densidade bariônica como função da pressão
     WRITE(10,10) r, p*1d3/(hbar*c)**3, m, e*1d3/(hbar*c)**3 ![r] = km, [p] = MeV/fm^3, [m] = Msun
  END DO
  CLOSE(10)
  !raio e massa totais da estrela estranha, impressos na tela
  PRINT*, r, m !km, Msol
```

```
50
51 END PROGRAM quarkstar
```

Programa 2 – Utilizado para gerar os dados do caso relativístico (curva azul cheia) na figura 4.3.

```
1  !ESTRELA ESTRANHA
2  !Caso relativístico (quarks com massa)
3  !Programa para calcular a massa e a pressão como funções do
       raio, do centro da estrela até a a superfície, onde p =
       0. Neste ponto, o programa para, imprimindo o raio
      total e a massa total da estrela na tela.
4  MODULE globals
5    !pi, velocidade da luz no vácuo, constante reduzida de
       Planck
6    REAL, PARAMETER :: pi = 4.*atan(1.0), c = 2.99792458d23,
       hbar = 6.58211915d-25 ![c] = fm/s, [hbar] = GeV.s
7    !R0 = G*Msol/c^2 // G = 6.67408d-11, Msol = 1.989d30 ![G]
        = m^3kg^-1s^-2, [Msol] = kg
8    REAL, PARAMETER :: R0 = 1.47611 !km
9    !M0 = 10^54/(6,242d9*Msol*c**2) !incluindo a conversão de
        m^3 para fm^3
10   REAL, PARAMETER :: M0 = 8.9616d-4 !GeV
11   !pressão de sacola
12   REAL, PARAMETER :: B = (0.155**4)*(5.07**3) !GeV/fm^3
13   !densidade bariônica nuclear
14   REAL, PARAMETER :: n0 = 1.2277d-3 !GeV^3 // n0 = 0.16 fm
       ^-3
15   !flavour
16   INTEGER :: f
17
18 END MODULE globals
19
20 PROGRAM quarkstar_massivequarks
21   USE globals
22   IMPLICIT NONE
23   !raio, passo do raio
24   REAL :: r, dr = 1d-3 !km
25   !massa // mi evita a divisão por zero na equação TOV
26   REAL :: m, mi = 1d-3 !Msol
27   !pressão, equação de estado, densidade de energia
```

```
  REAL :: p, pk, e !GeV/fm^3
  !momentum de Fermi
  REAL :: k !GeV
  !densidade bariônica, densidade bariônica central
  REAL :: n, nc !GeV^3
  !massa dos quarks, potencial químico
  REAL :: mf(3), mu(3)
10 format(E14.7, 1x, E14.7, 1x, E14.7, 1x, E14.7) !formato de impressão
11 format(1x, A, 14x, A, 14x, A, 14x, A)

  !massa dos quarks
  mf(1) = 0.005
  mf(2) = 0.007
  mf(3) = 0.150

  !condições iniciais
  nc = 5*n0
  k = (pi**2*nc)**(1/3.)
  p = pk(k, mf, 0)
  r = 0d0
  m = 0d0
  n = nc
  OPEN(10,FILE = 'T0-pmXrn.dat')
  WRITE(10,11) 'r', 'p', 'm', 'n/n0'
  DO WHILE (p > 0d0)
     WRITE(10,10) r, p*1d3, m, n/n0 ![r] = km, [p] = MeV/fm^3, [m] = Msol
     CALL newton(p, k, mf) !método para encontrar raízes
     r = r + dr !variável de integração
     p = -R0*e(k,mf)*m*dr/r**2.*(1.+p/e(k,mf))*(1.+4.*pi*r**3.*p*M0/mi)/(1.-2.*R0*m/r) + p !integração da TOV
     m = 4.*pi*r**2.*e(k,mf)*dr*M0 + m !integração da massa
     mi = m
     n = k**3/pi**2 !densidade bariônica
  END DO
  CLOSE(10)
  PRINT*, r, m

```

```
END PROGRAM quarkstar_massivequarks

SUBROUTINE newton(p, k0, mf)
  USE globals
  IMPLICIT NONE
  REAL :: pk, dpdk, p
  REAL :: k0, k
  REAL :: mf(3), mu(3)

  DO
     k = k0 - pk(k0,mf,p)/dpdk(k0,mf)
     IF (abs(pk(k0,mf,p)) <= 1d-11) EXIT
     k0 = k
 END DO

END SUBROUTINE newton

REAL FUNCTION pk(k,mf,p)
  USE globals
  IMPLICIT NONE
  REAL :: k, p
  REAL :: mu(3), mf(3)

  pk = 0.
  DO f = 1, 3
     mu(f) = sqrt(mf(f)**2 + k**2)
     pk = 1/(4.*pi**2)*(mu(f)*k*(mu(f)**2-5/2.*mf(f)**2)
        +3/2.*mf(f)**4*log((mu(f)+k)/mf(f))) + pk
  END DO
  pk = pk/(hbar*c)**3 ![pk]: GeV^4 -> GeV/fm^3
  pk = pk - B - p

END FUNCTION pk

REAL FUNCTION dpdk(k, mf)
  USE globals
  IMPLICIT NONE
  REAL :: k, mu(3), mf(3)

```

```
  dpdk = 0.
  DO f = 1, 3
     mu(f) = sqrt(mf(f)**2 + k**2)
     dpdk = 1/(pi**2)*(mu(f)**3 - 2*mf(f)**2*mu(f) + mf(f)
        **4/mu(f)) + dpdk
  END DO
  dpdk = dpdk/(hbar*c)**3 ![dpdk] = GeV^3 -> fm^3

END FUNCTION dpdk

REAL FUNCTION e(k, mf)
  USE globals
  IMPLICIT NONE
  REAL :: k, mu(3), mf(3)

  e = 0.
  DO f = 1, 3
     mu(f) = sqrt(mf(f)**2 + k**2)
     e = 3/(4.*pi**2)*(k*mu(f)*(k**2 - 1/2.*mf(f)**2) -
        1/2*mf(f)**4*log((k+mu(f))/mf(f))) + e
  END DO
  e = e/(hbar*c)**3 ![e]: GeV^4 -> GeV/fm^3
  e = e + B

END FUNCTION e
```

Programa 3 – Utilizado para gerar os dados no limite ultrarrelativístico (curvas vermelhas tracejadas) nas figuras 4.4 e 4.5. Também utilizado para representar a estrela estranha (curvas vermelhas pontilhadas) na figura 4.9.

```
!ESTRELA ESTRANHA
!Limite ultrarrelativístico (quarks sem massa)
!Programa para calcular a massa e raio totais da estrela
   como funções da pressão central.
PROGRAM quarkstar
  IMPLICIT NONE
!pi, velocidade da luz no vácuo, constante reduzida de
   Planck
  REAL, PARAMETER :: pi = 4.*atan(1.0), c = 2.99792458d23,
     hbar = 6.58211915d-25 ![c] = fm/s, [hbar] = GeV.s
  !R0 = G*Msol/c^2 // G = 6.67408d-11, Msol = 1.989d30 ![G]
```

```
      = m^3kg^-1s^-2, [Msol] = kg
  REAL, PARAMETER :: R0 = 1.47611 !km
  !M0 = 10^54/(6,242d9*Msol*c**2) !incluindo a conversão de m^3 para fm^3
  REAL, PARAMETER :: M0 = 8.9616d-4 !GeV
  !pressão de sacola
  REAL, PARAMETER :: B = 0.185**4 !GeV^4
  !densidade bariônica nuclear
  REAL, PARAMETER :: n0 = 1.2277d-3 !GeV^3 // n0 = 0.16 fm^-3
  !raio, passo
  REAL :: r, dr = 1d-3 !km
  !massa // mi evita a divisão por zero na equação TOV
  REAL :: m, mi = 1d-3 !Msol
  !pressão, densidade de energia
  REAL :: p, e, p0  !GeV^4
  !densidade bariônica, densidade bariônica central, passo
  REAL :: n, nc, dn = 1d-2*n0 !GeV^3

10 format(E14.7, 1x, E14.7, 1x, E14.7) !formato de impressão
11 format(1x, A, 14x, A, 14x, A)
  !condições iniciais
  nc = 5*n0
  p0 = 3*pi**(2/3.)*nc**(4/3.)/4. - B

  OPEN(10, FILE = 'MQ-MRXp0.dat') !arquivo de dados
  WRITE(10,11) 'p0', 'M', 'R'
  DO WHILE (nc/n0 < 15d0)
     r = 0d0
     m = 0d0
     mi = 1d-3

     p = p0
     n = nc
     e = 3*p + 4*B !equação de estado
     DO WHILE (p > 0d0)
        r = r + dr !variável de integração
        p = -R0*e*m*dr/(r**2.)*(1.+p/e)*(1.+4.*pi*r**3.*p*
```

```
            M0/mi)/(1.-2.*R0*m/r) + p !integração da TOV
        m = 4.*pi*r**2.*e*dr*M0/(hbar*c)**3 + m !integração da massa
        mi = m
        e = 3*p + 4*B
        !n = (4*(p+B)/(3*pi**(2/3.)))**(3/4.) !densidade bariônica como função da pressão
      END DO
      WRITE(10,10) p0*1d3/(hbar*c)**3, m, r ![r] = km, [p] MeV/fm^3, [m] = Msol
      nc = nc + dn
      p0 = 3*pi**(2/3.)*nc**(4/3.)/4. - B
  END DO
  CLOSE(10)

END PROGRAM quarkstar
```

Programa 4 – Utilizado para gerar os dados no caso relativístico (curva azul cheia) nas figuras 4.4 e 4.5. Também utilizado para os diferentes valores de B, na figura 4.6.

```
!ESTRELA ESTRANHA
!Caso relativístico (quarks com massa)
!Programa para calcular a massa e o raio totais da estrela em função da pressão central.
MODULE globals
  !pi, velocidade da luz no vácuo, constante reduzida de Planck
  REAL, PARAMETER :: pi = 4.*atan(1.0), c = 2.99792458d23, hbar = 6.58211915d-25 ![c] = fm/s, [hbar] = GeV.s
  !R0 = G*Msol/c^2 // G = 6.67408d-11, Msol = 1.989d30 ![G] = m^3kg^-1s^-2, [Msol] = kg
  REAL, PARAMETER :: R0 = 1.47611 !km
  !M0 = 10^54/(6,242d9*Msol*c**2) !incluindo a conversão de m^3 para fm^3
  REAL, PARAMETER :: M0 = 8.9616d-4 !GeV
  !pressão de sacola
  REAL, PARAMETER :: B = (0.145**4)*(5.07**3) !GeV/fm^3
  !densidade bariônica nuclear
  REAL, PARAMETER :: n0 = 1.2277d-3 !GeV^3 // n0 = 0.16 fm^-3
  !flavour
```

```
  INTEGER :: f

END MODULE globals

PROGRAM quarkstar_massivequarks
  USE globals
  IMPLICIT NONE
  !raio, passo do raio
  REAL :: r, dr = 1d-3 !km
  !massa // mi evita a divisão por zero na equação TOV
  REAL :: m, mi !Msol
  !pressão, equação de estado, densidade de energia,
     pressão central
  REAL :: p, pk, e, p0 !GeV/fm^3
  !momentum de Fermi
  REAL :: k !GeV
  !densidade bariônica, densidade bariônica central
  REAL :: n, nc, dn = 1d-4 !GeV^3
  !massa dos quarks, potencial químico
  REAL :: mf(3), mu(3)
10 format(E14.7, 1x, E14.7, 1x, E14.7) !formato de
   impressão
11 format(1x, A, 14x, A, 14x, A)

  !massa dos quarks
  mf(1) = 0.005
  mf(2) = 0.007
  mf(3) = 0.150

  !condições iniciais
  nc = 2*n0
  k = (pi**2*nc)**(1/3.)
  DO f = 1, 3
     mu(f) = sqrt(mf(f)**2 + k**2)
  END DO
  p0 = pk(k, mu, mf, 0)

  OPEN(10, FILE = 'T0-MRxp0.dat')
  WRITE(10,11) 'p0', 'R', 'M'
```

```
  DO WHILE (nc/n0 < 10d0)
     r = 0d0
     m = 0d0
     mi = 1d-3

     p = p0
     n = nc
     DO WHILE (p > 0d0)
        CALL newton(p, k, mf) !método para encontrar raízes
        r = r + dr !variável de integração
        p = -R0*e(k,mf)*m*dr/r**2.*(1.+p/e(k,mf))*(1.+4.*pi
           *r**3.*p*M0/mi)/(1.-2.*R0*m/r) + p !integração
           da TOV
        m = 4.*pi*r**2.*e(k,mf)*dr*M0 + m !integração da
           massa
        mi = m
        n = k**3/pi**2 !densidade bariônica
     END DO
     WRITE(10,10) p0*1d3, r, m ![r] = km, [p] = MeV/fm^3, [
        m] = Msol
     nc = nc + dn
     k = (pi**2*nc)**(1/3.)
     DO f = 1, 3
        mu(f) = sqrt(mf(f)**2 + k**2)
     END DO
     p0 = pk(k, mu, mf, 0)
  END DO
  CLOSE(10)

END PROGRAM quarkstar_massivequarks

SUBROUTINE newton(p, k0, mf)
  USE globals
  IMPLICIT NONE
  REAL :: pk, dpdk, p
  REAL :: k0, k
  REAL :: mf(3), mu(3)

  DO
```

```
      DO f = 1, 3
         mu(f) = sqrt(mf(f)**2 + k0**2)
      END DO
      k = k0 - pk(k0,mu,mf,p)/dpdk(k0,mu,mf)
      IF (abs(pk(k0,mu,mf,p)) <= 1d-11) EXIT
      k0 = k
 END DO

END SUBROUTINE newton

REAL FUNCTION pk(k,mu,mf,p)
  USE globals
  IMPLICIT NONE
  REAL :: k, p
  REAL :: mu(3), mf(3)

  pk = 0.
  DO f = 1, 3
      pk = 1/(4.*pi**2)*(mu(f)*k*(mu(f)**2-5/2.*mf(f)**2)
         +3/2.*mf(f)**4*log((mu(f)+k)/mf(f))) + pk
  END DO
  pk = pk/(hbar*c)**3 ![pk]: GeV^4 -> GeV/fm^3
  pk = pk - B - p

END FUNCTION pk

REAL FUNCTION dpdk(k, mu, mf)
  USE globals
  IMPLICIT NONE
  REAL :: k, mu(3), mf(3)

  dpdk = 0.
  DO f = 1, 3
      dpdk = 1/(pi**2)*(mu(f)**3 - 2*mf(f)**2*mu(f) + mf(f)
         **4/mu(f)) + dpdk
  END DO
  dpdk = dpdk/(hbar*c)**3 ![dpdk] = GeV^3 -> fm^3

END FUNCTION dpdk
```

```
125
126 REAL FUNCTION e(k,mf)
127   USE globals
128   IMPLICIT NONE
129   REAL :: k, mu(3), mf(3)
130
131   e = 0.
132   DO f = 1, 3
133      mu(f) = sqrt(mf(f)**2 + k**2)
134      e = 3/(4.*pi**2)*(k*mu(f)*(k**2 - 1/2.*mf(f)**2) -
         1/2*mf(f)**4*log((k+mu(f))/mf(f))) + e
135   END DO
136   e = e/(hbar*c)**3 ![e]: GeV^4 -> GeV/fm^3
137   e = e + B
138
139 END FUNCTION e
```

Programa 5 – Utilizado para gerar os dados da estrela híbrida nas figuras 4.7 e 4.8.

```
1  !ESTRELA HÍBRIDA
2  !Programa para calcular a massa e a pressão como funções do
       raio, do centro da estrela até a a superfície, onde p =
       0. Neste ponto, o programa para, imprimindo o raio
      total e a massa total da estrela na tela.
3  MODULE global
4    IMPLICIT NONE
5     !pi, velocidade da luz no vácuo, constante reduzida de
         Planck, massa de um núcleon
6    REAL, PARAMETER :: pi = 4.*atan(1.0), c = 2.99792458d23,
        hbar = 6.58211915d-25, mn = 0.938 ![c] = fm/s, [hbar]
        = GeV.s , [mn] = GeV
7    !R0 = G*Msol/c^2 // G = 6.67408d-11, Msol = 1.989d30 ![G]
         = m^3kg^-1s^-2, [Msol] = kg
8    REAL, PARAMETER :: R0 = 1.47611 !km
9    !M0 = 10^54/(6,242d9*Msol*c**2) !incluindo a conversão de
         m^3 para fm^3
10   REAL, PARAMETER :: M0 = 8.9616d-4 !GeV
11   !pressão de sacola
12   REAL, PARAMETER :: B = 0.185**4 !GeV^4
13   !densidade bariônica nuclear
14   REAL, PARAMETER :: n0 = 1.2277d-3 !GeV^3 // n0 = 0.16 fm
```

```
    ^-3
  !compressibilidade, energia de ligação, energia de simetria
  REAL, PARAMETER :: K = 0.17, W0 = -.016, Wsym = 0.032 !GeV

END MODULE global

PROGRAM hybridstar
  USE global
  IMPLICIT NONE
  !raio, passo do raio
  REAL :: r, dr = 1d-3 !km
  !massa // mi evita a divisão por zero na equação TOV
  REAL :: m, mi = 1d-3 !Msol
  !pressão, densidade de energia
  REAL :: p, e  !GeV^4
  !densidade bariônica, densidade bariônica central, densidade bariônica crítica (transição de fase)
  REAL :: n, nc, ncrit !GeV^3
10 format(E14.7, 1x, E14.7, 1x, E14.7, 1x, E14.7)
11 format(1x, A, 14x, A, 14x, A, 14x, A)

  nc = 8*n0
  !cálculo da densidade crítica
  !transição de fase ocorre quando a pressão da matéria hadrônica for igual a B
  ncrit = 4*n0 !palpite
  CALL newton(B,ncrit)

  !condições iniciais
  n = nc
  p = 3*pi**(2/3.)*n**(4/3.)/4. - B
  e = 3*p + 4*B
  r = 0d0
  m = 0d0
  mi = 1d-3 !evita divisão por zero
  OPEN(10, FILE='HS-mpeXr.dat')
  WRITE(10,11) 'r', 'p', 'e', 'm'
```

```
  WRITE(10,10) r, p*1d3/(hbar*c)**3, e*1d3/(hbar*c)**3, m !
     [r] = km, [p] = [e] = MeV/fm^3, [m] = Msol
  DO WHILE (p > 0d0)
     IF (n >= ncrit) THEN
        CALL quark(p, e, n)
     ELSE
        CALL neutron(p, e, n)
     END IF
     r = r + dr
     p = -R0*e*m*dr/r**2.*(1.+p/e)*(1.+4.*pi*r**3.*p*M0/mi)
        /(1.-2.*R0*m/r) + p !integração da TOV
     m = 4.*pi*r**2.*e*dr*M0/(hbar*c)**3 + m !integração da
         massa
     mi = m
     WRITE(10,10) r, p*1d3/(hbar*c)**3, e*1d3/(hbar*c)**3,
        m ![r] = km, [p] = [e] = MeV/fm^3, [m] = Msol
  END DO
  CLOSE(10)
  PRINT*, r, m

END PROGRAM hybridstar

SUBROUTINE quark(p, e, n)
  USE global
  IMPLICIT NONE
  REAL :: p, e
  REAL :: n

  e = 3*p + 4*B !GeV^4
  n = (4*(p+B)/(3*pi**(2/3.)))**(3/4.) !GeV^3

END SUBROUTINE quark

SUBROUTINE neutron(p, e, n)
  USE global
  IMPLICIT NONE
  REAL :: p, e
  REAL :: n

```

```
  CALL newton(p, n)
  e = n*(K/18.*(n-n0)**2/n0**2 + W0 + Wsym + mn)

END SUBROUTINE neutron

SUBROUTINE newton(p, ni)
  USE global
  IMPLICIT NONE
  REAL :: pn, p, dpdn
  REAL :: n, ni

  DO
     n = ni - pn(ni,p)/dpdn(ni)
     IF (abs(pn(ni,p)) <= 1d-11) EXIT
     ni = n
  END DO

END SUBROUTINE newton

REAL FUNCTION pn(n,p)
  USE global
  IMPLICIT NONE
  REAL :: n, p

  pn = K/9.*(n - n0)*(n/n0)**2 - p
END FUNCTION pn

REAL FUNCTION dpdn(n)
  USE global
  IMPLICIT NONE
  REAL :: n

  dpdn = K/9.*(3*(n/n0) - 2)*n/n0
END FUNCTION dpdn
```

Programa 6 – Utilizado para gerar os dados da estrela híbrida na figura 4.9.

```
!ESTRELA HÍBRIDA
!Programa para calcular a massa e o raio totais da estrela
   em função da pressão central.
MODULE global
```

```
  IMPLICIT NONE
   !pi, velocidade da luz no vácuo, constante reduzida de Planck, massa de um núcleon
  REAL, PARAMETER :: pi = 4.*atan(1.0), c = 2.99792458d23, hbar = 6.58211915d-25, mn = 0.938 ![c] = fm/s, [hbar] = GeV.s, [mn] = GeV
  !R0 = G*Msol/c^2 // G = 6.67408d-11, Msol = 1.989d30 ![G] = m^3kg^-1s^-2, [Msol] = kg
  REAL, PARAMETER :: R0 = 1.47611 !km
  !M0 = 10^54/(6,242d9*Msol*c**2) !incluindo a conversão de m^3 para fm^3
  REAL, PARAMETER :: M0 = 8.9616d-4 !GeV
  !pressão de sacola
  REAL, PARAMETER :: B = 0.185**4 !GeV^4
  !densidade bariônica nuclear
  REAL, PARAMETER :: n0 = 1.2277d-3 !GeV^3 // n0 = 0.16 fm^-3
  !compressibilidade, energia de ligação, energia de simetria
  REAL, PARAMETER :: K = 0.17, W0 = -.016, Wsym = 0.032 !GeV

END MODULE global

PROGRAM hybridstar
  USE global
  IMPLICIT NONE
  !raio, passo do raio
  REAL :: r, dr = 1d-3 !km
  !massa // mi evita a divisão por zero na equação TOV
  REAL :: m, mi !Msol
  !pressão central, pressão, densidade de energia
  REAL :: p0, p, e  !GeV^4
  !densidade bariônica, densidade bariônica central, densidade bariônica crítica, passo
  REAL :: n, nc, ncrit, dn = 1d-2*n0 !GeV^3
10 format(E14.7, 1x, E14.7, 1x, E14.7)
11 format(1x, A, 14x, A, 14x, A)

```

```
  nc = 5*n0

  !cálculo da densidade crítica
  !transição de fase ocorre quando a pressão da matéria hadrônica for igual a B
  ncrit = 4*n0 !palpite
  CALL newton(B,ncrit)

  OPEN(10, FILE='HS-MRxp0.dat')
  WRITE(10,11) 'p0', 'M', 'R'
  DO WHILE (nc < 15*n0)
     !condições iniciais
     p0 = 3*pi**(2/3.)*nc**(4/3.)/4. - B !GeV^4
     e = 3*p + 4*B
     r = 0d0
     m = 0d0
     mi = 1d-3 !evita divisão por zero
     n = nc
     p = p0
     DO WHILE (p > 0d0)
        IF (n >= ncrit) THEN
           CALL quark(p, e, n)
        ELSE
           CALL neutron(p, e, n)
        END IF
        r = r + dr
        p = -R0*e*m*dr/r**2.*(1.+p/e)*(1.+4.*pi*r**3.*p*M0/mi)/(1.-2.*R0*m/r) + p !integração da TOV
        m = 4.*pi*r**2.*e*dr*M0/(hbar*c)**3 + m !integração da massa
        mi = m
     END DO
     WRITE(10,10) p0*1d3/(hbar*c)**3, m, r ![r] = km, [p] = MeV/fm^3, [m] = Msol
     nc = nc + dn
  END DO
END PROGRAM hybridstar

SUBROUTINE quark(p, e, n)
```

```
  USE global
  IMPLICIT NONE
  REAL :: p, e
  REAL :: n

  e = 3*p + 4*B !GeV^4
  n = (4*(p+B)/(3*pi**(2/3.)))**(3/4.) !GeV^3

END SUBROUTINE quark

SUBROUTINE neutron(p, e, n)
  USE global
  IMPLICIT NONE
  REAL :: p, e
  REAL :: n

  CALL newton(p, n)
  e = n*(K/18.*(n-n0)**2/n0**2 + W0 + Wsym + mn)

END SUBROUTINE neutron

SUBROUTINE newton(p, ni)
  USE global
  IMPLICIT NONE
  REAL :: pn, p, dpdn
  REAL :: n, ni

  DO
     n = ni - pn(ni,p)/dpdn(ni)
     IF (abs(pn(ni,p)) <= 1d-11) EXIT
     ni = n
 END DO

END SUBROUTINE newton

REAL FUNCTION pn(n,p)
  USE global
  IMPLICIT NONE
  REAL :: n, p
```

```

  pn = K/9.*(n - n0)*(n/n0)**2 - p
END FUNCTION pn

REAL FUNCTION dpdn(n)
  USE global
  IMPLICIT NONE
  REAL :: n

  dpdn = K/9.*(3*(n/n0) - 2)*n/n0
END FUNCTION dpdn
```