A FUNÇÃO W DE LAMBERT E APLICAÇÕES NA FÍSICA

ARAUJO, Rodrigo Chollet[1]; VERONEZ, Fernando Baltar[1]; VARGAS Jr., Vanderlei Rocha[2]; SIMCH, Márcia[3]; SUAZO, Germán[3].

[1] Universidade Federal de Pelotas - UFPEL/Curso de Engenharia Eletrônica;
[2] Universidade Federal de Pelotas - UFPEL/Faculdade de Meteorologia;
[3] Universidade Federal de Pelotas - UFPEL/Centro de Engenharias;
rodrigochollet@hotmail.com

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo apresentar a função W de Lambert e associar a uma aplicação à área de física quântica.

A função W de Lambert recebeu esse nome porque no início da década de 80, o software simbólico Maple incluiu na sua biblioteca de funções, uma função que foi denominada simplesmente W. Porém, uma busca histórica conduz ao uso dessa função, de forma velada, pelo cientista J. H. Lambert no século XVIII. Também, o matemático E. M. Wright estudou as propriedades desta função, sem nomeá-la, e essa é a razão do W no nome desta função.

Todavia, a função W de Lambert auxilia na resolução algébrico-numérica de certas equações que aparecem de maneira natural em algumas situações da mecânica quântica, como veremos neste trabalho, e em outras, muito mais elaboradas.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Na Fig. 1 e Fig. 2 é descrita a construção dos ramos da função W de Lambert, como funções inversas das partes crescente e decrescente da função $g(x) = xe^x$.

$g(x) = xe^x$, $x \in]-\infty, \infty[$,
$g'(x) = (x+1)e^x$, $x \in]-\infty, \infty[$; ponto crítico: $x = -1$; $g'(x) < 0$ para $x \in]-\infty, -1[$, ($g(x)$ decrescente); $g'(x) > 0$ para $x \in]-1, \infty[$, ($g(x)$ crescente);
$g''(x) = (x+2)e^x$, $x \in]-\infty, \infty[$; $g''(x) < 0$ para $x \in]-\infty, -2[$, ($g(x)$ côncava para baixo); $g''(x)\quad 0$ para $x \in]-2, \infty[$, ($g(x)$ côncava para cima); $g''(-1) = -e^{-1} > 0$, então $x = -1$ é ponto de mínimo.

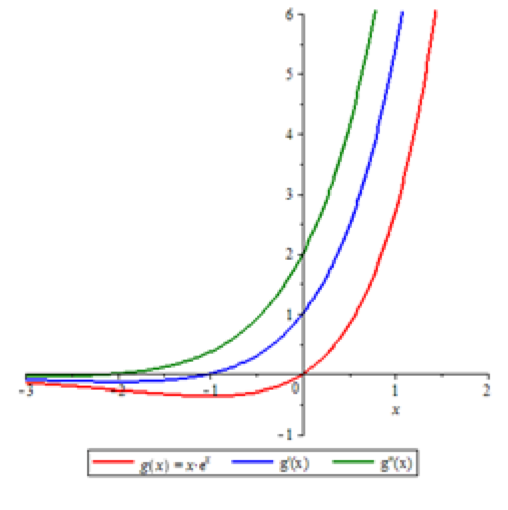
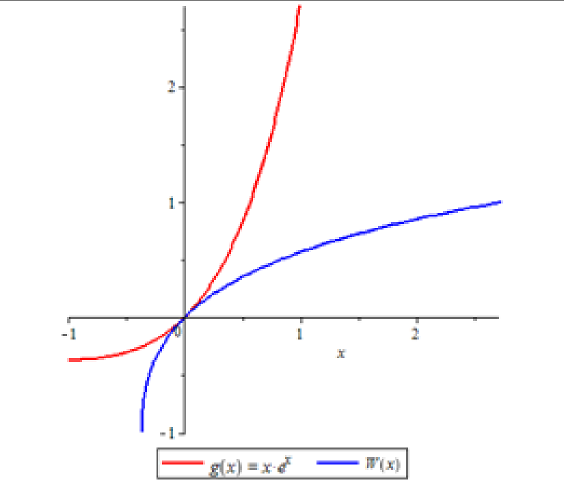


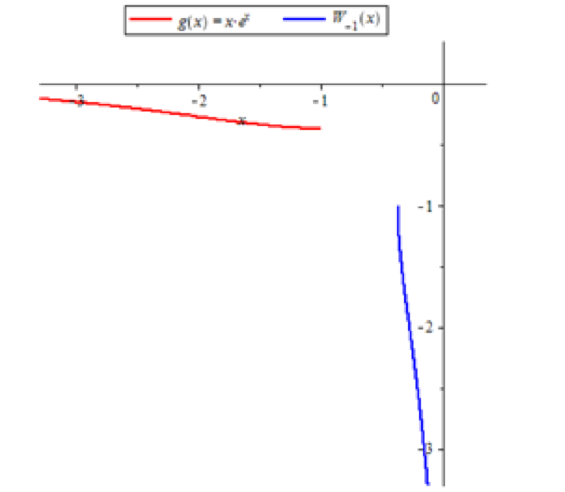
Figura 1 – Construção do gráfico da função $g(x) = xe^x$ mediante a análise da primeira e segunda derivadas.

$g(x) = xe^x$, $x \in]-1,+\infty[$



$W_0(x)$, inversa de $g(x)$ em $]-1,+\infty[$,
ramo maior da função W de Lambert

$g(x) = xe^x$, $x \in]-\infty,-1[$



$W_{-1}(x)$, inversa de $g(x)$ em $]-\infty,-1[$,
ramo menor da função W de Lambert

Figura 2 – Ramos da função W de Lambert

As seguintes propriedades são válidas para a função W de Lambert:

Tabela 1: Propriedades válidas para a função W de Lambert.

A	$\frac{d}{dx}W_0(x) = \frac{W_0(x)}{x(1+W_0(x))}$	$\frac{d}{dx}W_{-1}(x) = \frac{W_{-1}(x)}{x(1+W_{-1}(x))}$
B	$W_0(x\ln(x)) = \ln(x)$, **se** $e^{-1} \le x < \infty$	$W_{-1}(x\ln(x)) = \ln(x)$, **se** $0 < x \le e^{-1}$
C	$W_0\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) = -\ln(x)$, **se** $0 < x \le e$	$W_{-1}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = -\ln(x)$, **se** $e \le x < \infty$

2.1. Situação da Física Quântica:

A distribuição espectral de radiação de corpo negro é uma função do comprimento de onda λ (em m) e a temperatura absoluta T (em K), e é descrita por $\rho(\lambda,T)$, definida de modo que $\rho(\lambda,T)\,d\lambda$ é a potência emitida no intervalo de comprimento de onda $d\lambda$ por área unitária a partir de um corpo negro com temperatura absoluta T. O comprimento de onda $\lambda_{\max}$ na qual ρ atinge seu valor máximo obedece à lei de deslocamento de Wien: $\lambda_{\max}T = b$, onde b é a constante de deslocamento de Wien. Esta lei foi proposta por Wien em 1893 a partir de argumentos termodinâmicos. A lei de Wien pode ser deduzida a partir da lei de distribuição espectral de Planck e pode-se então determinar o valor de b.

A lei de distribuição espectral de Planck afirma que $\rho(\lambda,T) = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$, onde h é a constante de Planck, c é a velocidade da luz e k é a constante de Boltzmann. O valor de λ para o qual $\rho(\lambda,T)$ é máximo pode ser obtido resolvendo $\frac{\partial\rho}{\partial\lambda} = 0$, que conduz à equação $-5e^{hc/\lambda_{\max}kT} + 5 + \frac{hc}{\lambda_{\max}kT}e^{-hc/\lambda_{\max}kT} = 0$, que pode ser escrita na forma

$(x-5)e^{x} = -5$ ou $\left(e^{-1}\right)^{x} = -\frac{1}{5}x + 1$, onde $x = \frac{hc}{\lambda_{\max} kT}$. A resolução da referida equação é descrita a seguir.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na equação $\left(e^{-1}\right)^{x} = -\frac{1}{5}x + 1$ é feita a substituição $u = -\frac{1}{5}x + 1$, ou, equivalentemente, $x = -5u + 5$. A equação toma a forma $e^{5u-5} = u$, ou, $-5ue^{-5u} = -5e^{-5}$. Temos duas soluções, $u = -\frac{1}{5}W_0\left(-5e^{-5}\right)$ e $u = -\frac{1}{5}W_{-1}\left(-5e^{-5}\right)$. Desde que $x = -5u + 5$, temos que $x = 5 + W_0\left(-5e^{-5}\right)$ e $x = 5 + W_{-1}\left(-5e^{-5}\right)$. Pela Tab. 1 propriedade B, $W_{-1}\left(-5e^{-5}\right) = W_{-1}\left(e^{-5}\cdot \ln(e^{-5})\right) = \ln(e^{-5}) = -5$, pois $0 < e^{-5} < e^{-1}$. Logo, a equação $\left(e^{-1}\right)^{x} = -\frac{1}{5}x + 1$, tem duas soluções: $x = 5 + W_{-1}\left(-5e^{-5}\right) = 5 - 5 = 0$ e $x = 5 + W_0\left(-5e^{-5}\right) = 4{,}965114232$. Cabe salientar que os resultados foram obtidos através do software Maple.

Voltando à situação da física quântica, levando em conta que $h = 6{,}626068 \times 10^{-34}\ \frac{m^2 Kg}{s}$ é a constante de Planck, $c = 2{,}99792458 \times 10^{8}\ \frac{m}{s}$ é a velocidade da luz, $k = 1{,}3806503 \times 10^{-23}\ \frac{m^2 Kg}{s^2\ K}$ é a constante de Boltzmann, temos que $b = \lambda_{\max} T = \frac{hc}{k5 + W_0\left(-5e^{-5}\right)} = \frac{6{,}626068 \times 10^{-34} \cdot 2{,}99792458 \times 10^{8}}{1{,}3806503 \times 10^{-23} \cdot 4{,}965114232} m\,{}^{o}K$, e consegue-se o valor de $b = 0{,}002897768287\, m\,{}^{o}K$ para a constante de deslocamento de Wien. Este valor coincide, em todas as casas decimais, com os valores encontrados na bibliografia.

4. CONCLUSÃO

Tradicionalmente, o valor de x na equação transcendental $\left(e^{-1}\right)^{x} = -\frac{1}{5}x + 1$ é aproximado mediante o uso do algoritmo de Newton, ou através de um método similar. Neste trabalho, a equação foi resolvida visando uma forma explicita, utilizando a função W de Lambert; sendo que o valor de x pode ser avaliado mediante um programa computacional, sem a necessidade de programar; também, porque os programadores do software tem implementado o método mais rápido e preciso para esta situação. Desta forma, o conteúdo físico do problema não é alterado, mas ganha, em termos matemáticos, elegância e conveniência.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. **Cálculo, volume II.** Porto Alegre, Bookman, 2007.

TIPLER, P. A., BIASI, R. S. **Física moderna**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

TIPLER, P. A., MOSCA, G. **Física: para cientistas e engenheiros**. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

VALLURI, S. R. et al. **Some Applications of the Lambert W Function to Physics**. 2000. Technical Report – N6A 5B7. The University of Western Ontário, Canadá.