

EDO LINEARES DE SEGUNDA ORDEM NÃO HOMOGENEOS

**VARGAS JR, Vanderlei Rocha¹; BRAZ, Dejanira Ferreira¹; SIMCH, Márcia²;
SUAZO, Germán²**

¹ Universidade Federal de Pelotas - UFPEL/Faculdade de Meteorologia;

² Universidade Federal de Pelotas - UFPEL/Centro de Engenharias;
vrvjr@hotmail.com

1 – INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma metodologia de resolução de equações diferenciais ordinárias (EDO) lineares de segunda ordem não homogêneas com termos de fonte periódicos não necessariamente senoidais. As ferramentas utilizadas são as séries de Fourier e o método de coeficientes indeterminados. Uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes modela, por exemplo, um circuito RLC. O termo de fonte $\left(\frac{dV}{dt}\right)$ pode representar um sinal elétrico de entrada. Os sinais elétricos são de natureza periódica, não necessariamente senoidal.

Tradicionalmente, a equação diferencial é resolvida mediante técnicas analíticas e/ou numéricas. Com isto, o trabalho tem como objetivo apresentar uma metodologia de resolução numérica de tais equações utilizando diagramas de blocos operacionais, implementados no Simulink. Para tanto, são utilizados diagramas de blocos baseados na função de transferência da EDO e numa construção de diagramas (retro-alimentados) de blocos integradores.

2 – MATERIAL E MÉTODOS

Num circuito elétrico, i é a corrente no circuito, R é a resistência do resistor, L a indutância do indutor, C é a capacitância do capacitor e V é a diferença de potencial da fonte. A EDO que governa a corrente $i = i(t)$ no circuito é dada por:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i = \frac{dV}{dt} \quad \text{Equação 1}$$

O interesse do trabalho é então, obter a corrente quando $V = V(t)$ é de natureza periódica não senoidal. Em cursos tradicionais, para uma abordagem analítica, podemos supor que $\frac{dV}{dt}$ pode ser escrita na forma de uma expansão em séries de Fourier:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \text{sen}(k\omega_0 t)) \quad \text{Equação 2}$$

Onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ e T_0 é o período e resolvida mediante o uso da transformada de Laplace. A equação diferencial pode ser escrita como:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\zeta\omega\frac{di}{dt} + \omega^2i = f(t) \quad \text{Equação 3}$$

Onde $\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$ é o fator de amortecimento; $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, a frequência angular de ressonância; e $f(t)$, uma função periódica de período T_0 .

3 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

Alternativamente, é proposta uma abordagem através do uso do Simulink, permite resolver esta equação de, pelo menos, duas maneiras diferentes, mas equivalentes. O Simulink permite a construção de diagramas de blocos para resolver, entre outros, EDO lineares. Estes diagramas são construídos baseados em dois enfoques.

Por um lado, a Eq. 3 possui, sob condições iniciais nulas, a função de transferência:

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} \quad \text{Equação 4}$$

O Simulink permite construir o diagrama de blocos mostrado Fig. 1, que corresponde a um circuito com termo de fonte igual a um trem de pulsos quadrados:

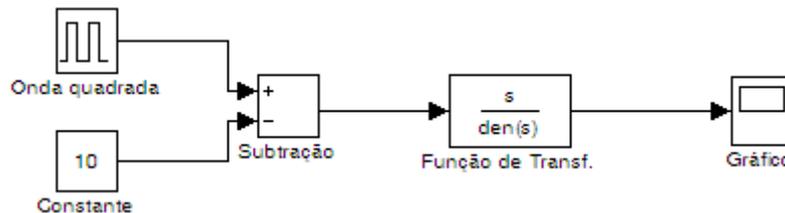


Figura 1 – Diagrama de blocos correspondente a um circuito com termo de fonte igual a um trem de pulsos quadrados.

Agora, como uma segunda alternativa, podemos considerar o diagrama de blocos (Fig. 2) que também resolve a Eq. 3.

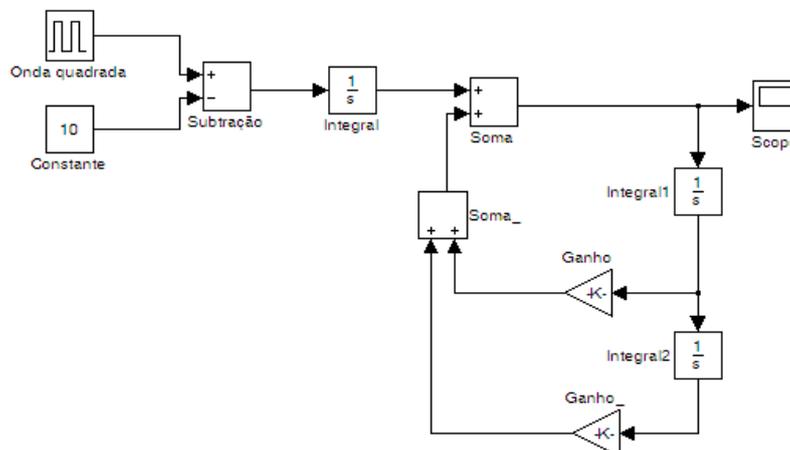


Figura 2 – Diagrama alternativo para solução da Eq. 3.

Em que é seguida a seguinte equação:

$$i(t) = -2 \cdot \zeta \cdot \omega \cdot i_{(-1)}(t) - \omega^2 \cdot i_{(-2)}(t) + V_{(-1)}(t) \quad \text{Equação 5}$$

Onde o $i_{(-k)}(t)$ significam k aplicações do operador integral sobre a função $i(t)$, que é equivalente a EDO original (Eq. 3).

Na Fig. 3 apresentam-se os resultados para diversos valores de R , L e C que conduzem aos casos sub-amortecido, criticamente amortecido e sobre-amortecido.

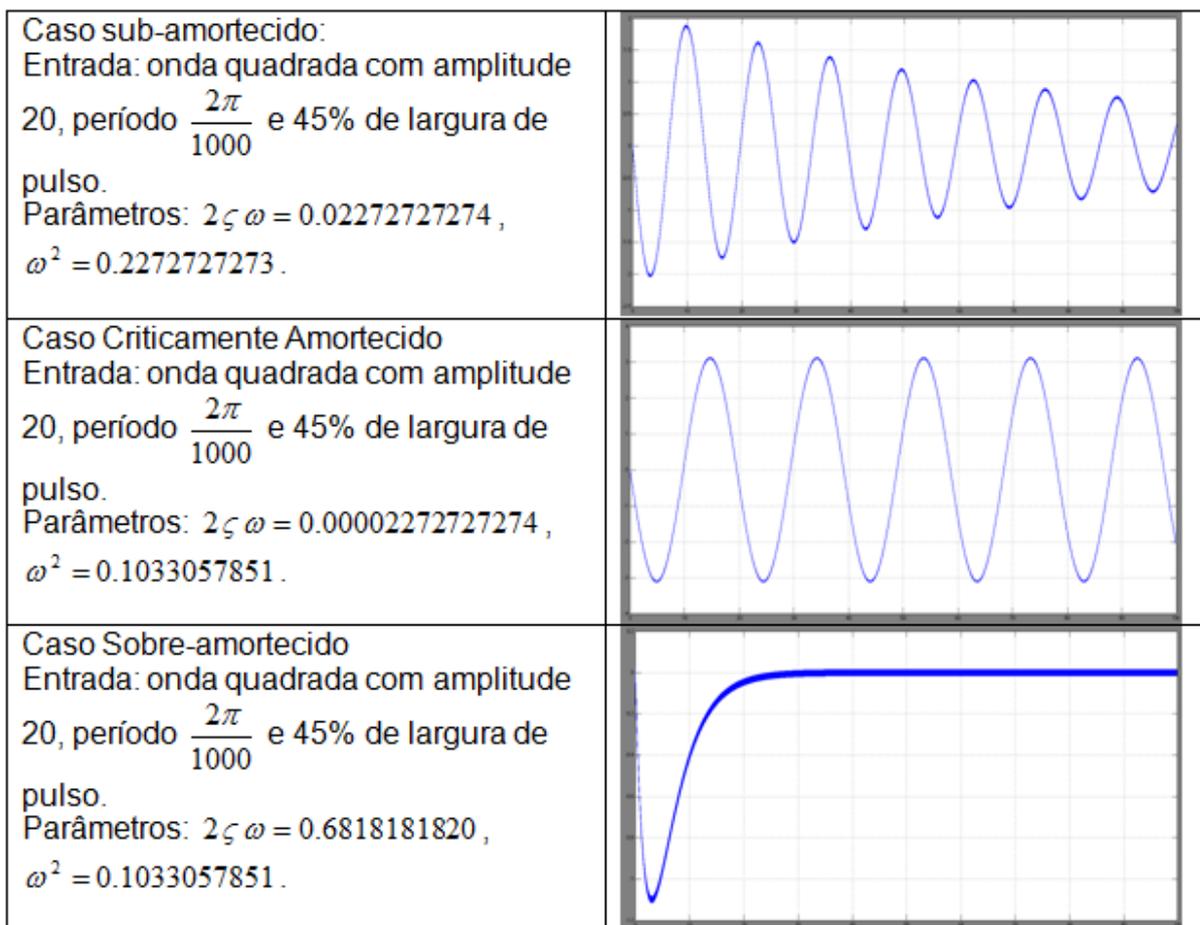


Figura 3 – Resultados numéricos.

4 – CONCLUSÃO

É mostrado neste trabalho que as EDO lineares, além de serem resolvidas analítica e numericamente, podem ser formuladas mediante diagramas de blocos, que também utilizam métodos numéricos pré-construídos, resolvendo através da abordagem da função de transferência e também por diagramas de blocos integradores no domínio do tempo. Este aspecto é interessante porque permite visualizar as equações diferenciais como sendo sistemas com entrada-saída que se caracteriza uma forma útil e prática para muitas áreas da engenharia.

5 – REFERÊNCIAS

Nussenzveig, Moyses H. **Curso de Física Básica, Eletromagnetismo**. São Paulo: Edgard Blücher, 1997.

Walker, Jearl; Halliday, David; Resnick, Robert. **Fundamentos da Física**. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

ANTON, H. **Cálculo, volume II**. Porto Alegre, Bookman, 2007.

ZILL, D. **Equações diferenciais, Volumes 1 e 2**, Editora Pearson, 2007.

KREIDER, D. **Equações Diferenciais**, Editora Edgar Blucher, 1990.

BRONSON, R. **Equações Diferenciais**, Editora Bookman, 2001.