

## MODELAGEM MATEMÁTICA E EXPERIMENTAL EM ROBÓTICA

**SALES, Rafael M.<sup>1</sup>; MOLTER, Alexandre<sup>2</sup>; COSTA, Camila P.<sup>2</sup>; FIGUEIREDO, Matheus P.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas, Engenharia de Controle e Automação; <sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas, Departamento de Matemática e Estatística, <sup>3</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense, Engenharia Elétrica. rafael.ma.sales@gmail.com

### 1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho foi estudada a cinemática de robôs com intuito de modelar e descrever posições da parte terminal do robô através de equações matemáticas. Para isso utilizaram-se conhecimentos em álgebra linear e trigonometria. Para simular a cinemática de um manipulador foi feita uma implementação no computador, software Matlab. As simulações experimentais foram feitas num protótipo de robô planar, composto de dois elos e duas articulações. Um protótipo experimental foi confeccionado com material de reaproveitamento, o que o tornou de baixo custo, comparado com os modelos que estão no mercado. No entanto, pela forma de fabricação deste, vários erros mecânicos foram introduzidos no sistema, de tal forma que a parte experimental ficou bastante limitada, com restrições de movimento, de controle de trajetórias e controle de vibrações, o que só é possível através das simulações computacionais.

### 2 METODOLOGIA

Um manipulador robótico (robô) é formado por elos e juntas (articulações). O problema fundamental da robótica consiste em programar um robô com o objetivo de executar tarefas. Para realizar o controle de um robô é necessário o seu estudo mecânico, que se divide em cinemática e dinâmica. A cinemática descreve as posições de cada elo através dos ângulos e comprimento do elo (no caso da cinemática direta), ou através da posição do elemento terminal do robô em variáveis espaciais de onde podem ser calculados os ângulos (cinemática inversa). A dinâmica descreve o movimento do robô (Spong, 1989).

#### 2.1 Cinemática

Para obter as equações da cinemática direta e inversa, da parte rígida dos elos, é necessário saber computar as relações matemáticas entre as posições de cada junta (Spong, 1989; Molter, 2008). Inicialmente adota-se um sistema de coordenadas de referência na base  $(x_0, y_0)$ . Para os demais elos tem-se um sistema  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$ , como mostrado na Fig. 1.

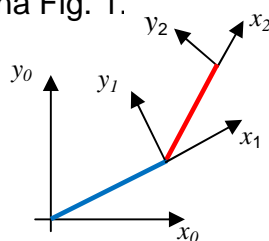


Figura 1

Após utilizam-se os conceitos de álgebra linear, no que se refere a transformações lineares (Lay, 1999). Através destas transformações pode-se relacionar a posição final, por exemplo, com as variáveis de outros elos. Nessas transformações consideraremos rotação (como visto na Fig. 3) e translação (Fig. 4) de um sistema de coordenadas em relação a outro.

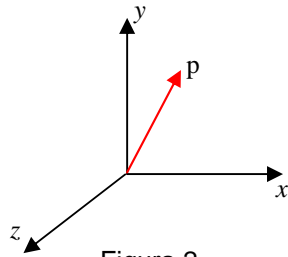


Figura 2

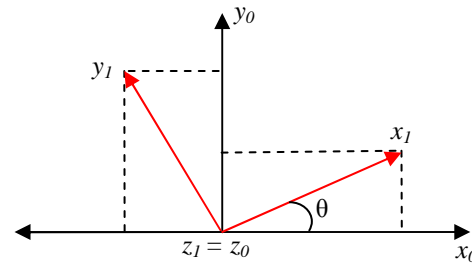


Figura 3

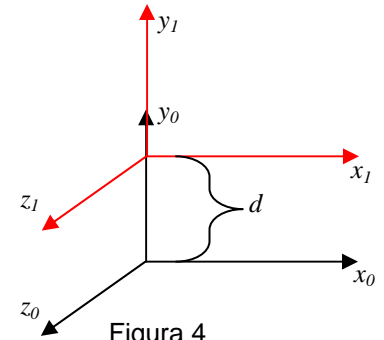


Figura 4

A chamada matriz de transformação homogênea é descrita por,

$$H = \begin{bmatrix} R & \mathbf{d} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta & \text{sen} \theta & d_x \\ \text{sen} \theta & \cos \theta & -\text{sen} \theta & d_y \\ -\text{sen} \theta & \text{sen} \theta & \cos \theta & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $\theta$  é o ângulo ao qual o vetor  $\mathbf{p}$  (Fig. 2) seria rotacionado no espaço,  $R$  representa a matriz de rotação e o vetor  $\mathbf{d}$  é o vetor que descreve a distância entre as origens dos sistemas de coordenadas analisados ( $O_0$  e  $O_1$ ). Para fazer a rotação de um vetor em torno do eixo  $x$  e achar suas novas coordenadas é multiplicada a matriz de rotação pelo vetor de origem  $\mathbf{p}_0$  e encontrado um vetor contendo as novas coordenadas após a rotação.

$$\mathbf{p}_0 \cdot \text{Rot}_{x,\theta} = \mathbf{p}_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\text{sen} \theta & 0 \\ 0 & \text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_1$$

onde  $\text{Rot}_{x,\theta}$  é matriz de rotação em torno do  $x$ . Do mesmo jeito tem-se uma translação na direção do eixo  $x$  de distância  $a$  da origem a extremidade

$$\mathbf{p}_0 \cdot \text{Trans}_{x,a} = \mathbf{p}_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_1$$

onde  $\text{Trans}_{x,a}$  é uma matriz de translação. É importante lembrar que  $\mathbf{p}_0$  é o vetor que descreve a posição inicial do vetor  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}_1$  é o vetor que descreve a posição final do mesmo. Para o uso dessa matriz de transformação homogênea é necessário considerar as seguintes matrizes:

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para transformar coordenadas de um ponto  $p$  a partir do sistema de coordenadas  $j$  para um sistema de coordenadas  $i$  é preciso usar a matriz de transformação homogênea. Caso haja uma rotação, depois uma translação

multiplica-se as matrizes das transformações sucessivas e obtém-se a transformação total do sistema da base até o elemento terminal, que é dada por

$$H_i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & \mathbf{d}_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_i^j = H_{i+1} H_{i+2} \dots H_{i-j} H_j$$

A matriz  $H$  pode ser tanto de rotação como de translação. A multiplicação de sucessivas ações irá gerar um  $T$ , que denota a matriz de transformação completa.

## 2.2 Simulação da cinemática em Matlab

Considere um robô espacial com três juntas e três elos, implementado em Matlab, como mostrado na Fig. 5.

As matrizes de rotação foram descritas através de três entradas de ângulos que geram as coordenadas da posição final de cada elo. A primeira entrada é referente ao ângulo em que a base irá girar. A segunda entrada define o ângulo em que o segundo elo irá girar em relação à base. A terceira entrada é referente ao ângulo que o terceiro elo irá girar em relação ao segundo elo. Por exemplo, com os valores 90°, 0° e 0° a base do robô irá girar 90° no sentido anti-horário como mostrado na Fig. 6. Já se os valores atribuídos forem 0°, 90° e 90°, a base permanecerá na sua posição inicial, o segundo elo irá girar 90° em relação à base e o terceiro elo irá girar 90° em relação ao segundo elo como mostrado na Fig. 7.

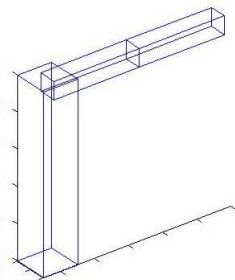


Figura 5

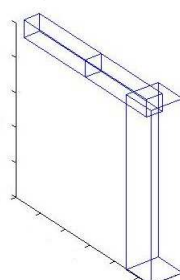


Figura 6

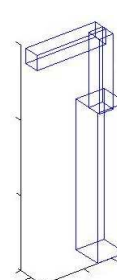


Figura 7

## 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os experimentos foram realizados no protótipo, mostrado na Fig. 8, com um esquema de controle mostrado na Fig. 9.



Figura 8

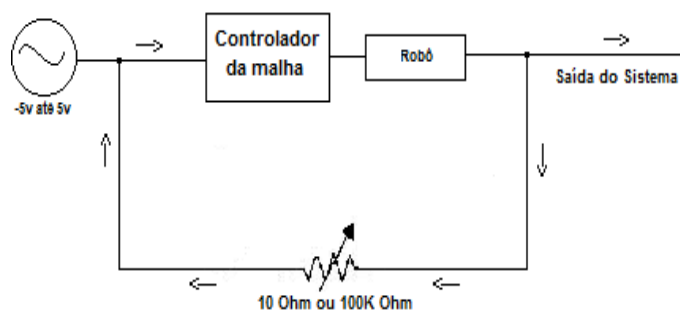


Figura 9

No modelo experimental têm-se dois motores de 12 Volts com corrente máxima de 5.5 Amperes e dois potenciômetros. O controle é realizado com a realimentação do sistema, através dos potenciômetros acoplados com a rotação dos motores definindo quão distante está do ponto desejado. Esse tipo de controle é muito útil a essa aplicação, pois possui uma referência para o elemento terminal do robô, atuando diretamente na parte de dinâmica. Os motores operam de -5 até 5 volts, onde essa a variação nessa faixa define o sentido e velocidade dos elos do robô.

Devido a restrições do acoplamento das juntas do protótipo, o mesmo não atendeu todas as expectativas. Essas restrições não permitiram atenuação de oscilações do robô ao longo da trajetória e em torno do ponto final desejados. Podem-se identificar alguns dos problemas encontrados: as potências dos motores, folgas nas correias e ruídos presentes nos potenciômetros. Desta forma as limitações estruturais no modelo experimental restringiram a eficiência do modelo. Porém as simulações em Matlab foram muito úteis, a análise de um modelo computacional em três dimensões é mais completa comparado ao modelo experimental da Fig. 8 que é tratado com duas dimensões. Essa abordagem computacional mostrou-se eficaz na visualização da cinemática.

#### 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho é apresentada a descrição da posição do elemento terminal de um robô, em função das variáveis de junta, com respeito a um sistema de coordenadas de referência. Tais relações são de grande importância para aplicações na área de robótica. Apesar do modelo no Matlab ser espacial e o modelo experimental ser planar foi possível visualizar relações de cinemática. O modelo experimental permitiu a observação da fundamentação teórica e do método de controle. O modelo simulado em Matlab possibilitou uma análise em três dimensões completa dos modelos de cinemática. Como seqüência deste trabalho prevêem-se simulações computacionais da dinâmica do manipulador considerando controle, principalmente de vibrações em elos flexíveis.

#### 5 REFERÊNCIAS

LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações**, LTC, 1999.

SPONG, Mark W. **Robot Dynamics and Control**. New York: Jhon wiley & Sons, 1989.

MOLTER, A. **Controle de Manipuladores Robóticos Flexíveis Usando Atuadores e Sensores Piezelétricos Otimizados**. Tese de Doutorado, UFRGS/PROMEC, Porto Alegre, 2008.