Conjuntos Algébricos e Topologia de Zariski

SILVA, Marcelo Santos[1]; BECK, Vinicius Carvalho[2];

[1] *Licenciado em Matemática - UFPEL*
Bacharelando em Matemática - UFRGS
Autor
marcelo.math@yahoo.com.br

[2] *Licenciado em Matemática - UFPEL*
Professor do Departamento de Matemática e Estatística - UFPEL
Orientador
vonoco@gmail.com

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar os conceitos e propriedades básicas de conjuntos algébricos e a topologia de Zariski, estes que caracterizam noções elementares da geometria algébrica clássica. O principal enfoque será a topologia de Zariski e a verificação de que esta topologia não é de Hausdorff.

Palavras-chave: conjuntos algébricos, topologia de Zariski e espaço de Hausdorff.

1. INTRODUÇÃO

Inicialmente serão enunciados alguns conceitos elementares até chegarmos na definição de conjuntos algébricos, posteriormente as noções de espaço topológico e topologia de Zariski serão apresentados e, ao fim, de espaço de Hausdorff. As propriedades dos conjuntos algébricos formaram a base para a construção da topologia de Zariski e a verificação que este espaço topológico construído não é de Hausdorff.

2. MATERIAL E MÉTODOS

A metodologia utilizada para a realização deste trabalho foi à pesquisa em diferentes livros e artigos dedicados à topologia e curvas algébricas, podemos destacar o livro do Fulton [1] uma referência clássica e conceituada para uma introdução a geometria algébrica, além das notas de Andreas [4] foram inspiradoras em muitos casos, em seguida um estudo dessas diferentes fontes e um adequamento do encadeamento lógico e conceitual foi feito para uma melhor compreensão de modo que, ao fim, chegássemos aos resultados esperados.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Vamos agora as definições necessárias para a construção dos conjuntos algébricos e, posteriormente, chegarmos na topologia de Zariski.

Definição 1: Seja K um corpo algebricamente fechado (por exemplo, K = C). Definimos o espaço afim de dimensão n sobre K ao conjunto $A_K^n = K \times \ldots \times K$ (n vezes).

Definição 2: Consideremos $K[x_1,\dots,x_n]=\{\sum_I a_I x^I : a_I \in K\}$ como sendo o conjunto de polinômios a n-variáveis sobre o corpo K.

Definição 3 (conjunto algébrico): Seja $S \subseteq K[x_1,\dots,x_n]$. O conjunto $V(S)=\{(x_1,\dots,x_n)\in A_K^n : f(x_1,\dots,x_n)=0, \forall f \in S\}$ é chamado de conjunto algébrico ou ainda de variedade algébrica afim.

Propriedades dos Conjuntos Algébricos:

$i)$ $V(\emptyset)= A_K^n$ e $V(K[x_1,\dots,x_n])= \emptyset$;

$ii)$ $Se\ S_1 \subseteq S_2 \subseteq K[x_1,\dots,x_n]$, então $V(S_2)\subseteq V(S_1)\subseteq A_K^n$;

$iii)$ Seja $\{S_i\}_{i\in I}$ um família de subconjuntos de $K[x_1,\dots,x_n]$. Então $\bigcap_{i\in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i\in I} S_i)$;

$iv)$ Se S_1, $S_2 \subseteq K[x_1,\dots,x_n]$, então $V(S_1)\cup V(S_2) = V(S_1S_2) \subseteq A_K^n$; Observando que $S_1S_2 = \{fg \in K[x_1,\dots,x_n]: f\in S_1, g\in S_2\}$;

Demonstração:

$i)$ Imediato pela definição.

$ii)$ Supondo $S_1 \subseteq S_2 \subseteq K[x_1,\dots,x_n]$. Seja $X=(x_1,\dots,x_n)\in V(S_2)$, por definição de conjunto algébrico temos $f(X)=0, \forall f \in S_2$, em particular, temos $f(X)=0, \forall f \in S_1$ e, desta forma temos, novamente por definição, $X=(x_1,\dots,x_n)\in V(S_1)$. Portanto $V(S_2)\subseteq V(S_1)\subseteq A_K^n$.

$iii)$ Seja $\{S_i\}_{i\in I}$ um família de subconjuntos de $K[x_1,\dots,x_n]$. Seja $X=(x_1,\dots,x_n)\in \bigcap_{i\in I} V(S_i)$. Assim $X\in V(S_i)$, $\forall i\in I$, isto é, para cada $i\in I$ temos $f(X)=0, \forall f\in S_i$. Logo devemos ter que $f(X)=0$, $\forall f\in \bigcup_{i\in I} S_i$, na qual por definição temos $X=(x_1,\dots,x_n)\in V(\bigcup_{i\in I} S_i)$. Agora, por outro lado, seja $X=(x_1,\dots,x_n)\in V(\bigcup_{i\in I} S_i)$. Assim temos que $f(X)=0$, $\forall f\in \bigcup_{i\in I} S_i$. Particularmente temos para cada $i\in I$ que $f(X)=0, \forall f\in S_i \subseteq \bigcup_{i\in I} S_i$, ou seja, $X\in V(S_i)$, $\forall i \in I$. Portanto $X=(x_1,\dots,x_n)\in \bigcap_{i\in I} V(S_i)$. Por fim $\bigcap_{i\in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i\in I} S_i)$.

$iv)$ Seja $X=(x_1,\dots,x_n)\in V(S_1) \cup V(S_2)$. Então $X \in V(S_1)$ ou $X\in V(S_2)$. Desta forma devemos ter $f_1(X)=0$ ou $f_2(X)=0$, $\forall f_1\in S_1$ e $\forall f_2 \in S_2$, mas assim segue que $(f_1f_2)(X)=0$, $\forall f_1\in S_1$ e $\forall f_2\in S_2$. Portanto $X=(x_1,\dots,x_n)\in V(S_1S_2)$. Agora, por outro lado, se $X=(x_1,\dots,x_n)$ não pertence $V(S_1) \cup V(S_2)$, então X não pertence a $V(S_1)$ nem $V(S_2)$. Assim existem $f_1\in S_1$ e $f_2\in S_2$ tais que $f_1(X)\neq 0$ e $f_2(X)\neq 0$. Logo devemos ter $(f_1f_2)(X)\neq 0$ e, portanto, X não pertence a $V(S_1S_2)$.

Definição 4 (topologia): Seja X um conjunto não-vazio e $\wp(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X. Uma *topologia* sobre X é uma coleção $\tau \subset \wp(X)$ que cumpre as seguintes propriedades:

1) $\emptyset, X\in\tau$.

2) $A_i\in\tau \Longrightarrow \bigcup_i A_i \in \tau$.

3) $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.
Observação: Na propriedade 2), a união é arbitrária.

Definição 5 (espaço topológico): Dada uma topologia τ sobre um conjunto X, o par $< X, \tau >$ é denominado *espaço topológico*.

Definição 6 (conjuntos abertos e fechados): Os elementos de uma topologia τ são chamados de *abertos de* τ. De *f*orma semelhante chamamos de *fechado de* τ, ao complementar de um aberto em τ.

Definição 7 (topologia de Zariski): Definimos a topologia de Zariski, sobre $A_K^n = K \times \dots \times K$, como sendo $\omega = \{ A_K^n \setminus V(S) : S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]\}$, isto é, os conjuntos fechados da topologia de Zariski são exatamente os conjuntos algébricos de A_K^n. Observemos que pelas propriedades dos conjuntos algébricos de fato ω é uma topologia sobre A_K^n.

Definição 8 (espaço de Hausdorff): Um espaço topológico $< X, \tau >$ é dito de Hausdorff se para qualquer $x, y \in X$ existem abertos $U, V \in \tau$ tais que $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Entre as peculiaridades da topologia de Zariski se destaca um belo exemplo de um espaço topológico que não é de Hausdorff. Como os fechados da topologia são raízes comuns a uma coleção arbitrária de polinômios de $K[x_1, \dots, x_n]$, estes fechados são "pequenos" em relação ao espaço afim A_K^n. Desta forma podemos observar que para quaisquer $U, V \in \omega$ com $U \neq \emptyset$ e $V \neq \emptyset$ devemos ter $U \cap V \neq \emptyset$. Portanto o espaço $\langle A_K^n, \omega \rangle$ não pode ser de Hausdorff.

4. CONCLUSÃO

A construção e o estudo de conjuntos algébricos bem como a topologia de Zariski representam as primeiras "ferramentas" tratadas em um curso de curvas algébricas. Este último conteúdo, por sua vez, faz parte de uma área mais ampla e considerada uma das áreas mais antigas e difíceis da matemática, a geometria algébrica. Desta forma, a compreensão e a caracterização dessas estruturas e conceitos são de grande importância ao acadêmico. Entretanto uma continuação deste estudo, e evidentemente mais geral, seria uma análise análoga, mas considerando espaços projetivos.

REFERÊNCIAS

[1] FULTON, W. **Algebraic Curves**. New York, Benjamin, 1969.

[2] LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1976.

[3] GATHMANN, Andreas. **Algebraic Geometry**. University of Kaiserslautern.

[4] ARBARELLO, E. **Geometry of Algebraic Curves, Vol I**. New York, Springer Verlag, 1985.