UMA DEMONSTRAÇÃO DA DESIGUALDADE DE ERDÖS-MORDELL UTILIZANDO GEOMETRIA EUCLIDIANA

LUDWIG, Ana Paula[1]; **SAUER, Lisandra**[2]

[1] Universidade Federal de Pelotas- UFPel.Licenciatura em Matemática.analudwig93@hotmail.com; [2] Universidade Federal de Pelotas- UFPel, DME-IFM.lisandra.sauer@ufpel.edu.br

1 INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é utilizar ferramentas básicas da Geometria Euclidiana para demonstrar a desigualdade de Erdös-Mordell.

Esta famosa desigualdade foi inicialmente conjecturada pelo matemático húngaro Paul Erdös em 1935 e demonstrada no mesmo ano por Louis Mordell, na revista American Mathematical Monthly (problema n° 3740). Logo após surgiram várias soluções e alguns artigos sobre a mesma, cada uma usando variadas técnicas, atualmente existem mais de 20 demonstrações diferentes desta desigualdade.

A demonstração que iremos apresentar utiliza o teorema de Ptolomeu e conceitos básicos da geometria tais como as definições de semelhança de triângulos e retas paralelas.

2 METODOLOGIA (MATERIAL E MÉTODOS)

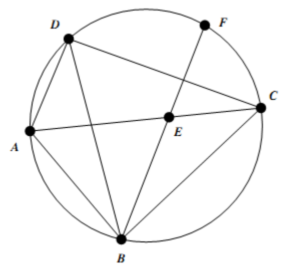
A metodologia adotada foi a pesquisa em artigos da área, ver [1] e [2], consulta a internet, em destaque o site [3], e também encontros periódicos para fazer a conexão com os conteúdos da Geometria Euclidiana.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para fazer a demonstração da desigualdade de Erdös-Mordell vamos utilizar o Teorema de Ptolomeu que por si só já é de grande beleza e importância.

Teorema de Ptolomeu: *Num quadrilátero qualquer inscrito numa circunferência, a soma dos produtos dos lados opostos é igual ao produto das diagonais, ou seja, se ABCD é um quadrilátero inscritível de diagonais* $\overline{AC}$ *e* $\overline{BD}$, *então:* $\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{BC}.\overline{AD}=\overline{AC}.\overline{BD}$.

Prova: Tomemos um ponto E sobre $\overline{AC}$, tal que $A\hat{B}E=D\hat{B}C$.



Da relação de ângulos inscritos e os arcos correspondentes, temos:

$$A\hat{B}E=\frac{\widehat{ADF}}{2}=\frac{\widehat{AD}+\widehat{DF}}{2}$$

$$D\hat{B}C = \frac{\widehat{DFC}}{2} = \frac{\widehat{DF} + \widehat{CF}}{2}.$$

Por hipótese $A\hat{B}E\ = D\hat{B}C$, assim:

$$\frac{\widehat{AD} + \widehat{DF}}{2} = \frac{\widehat{DF} + \widehat{CF}}{2}$$

$$\widehat{AD} = \widehat{CF}.$$

Observe que o ângulo $B\hat{E}A$ é externo ao triângulo EBC. Assim,

$$B\hat{E}A = E\hat{B}C + B\hat{C}E = \frac{\widehat{CF} + \widehat{AB}}{2}.$$

Por outro lado, $D\hat{C}B = \frac{\widehat{AD}+\widehat{AB}}{2}$.

Logo, $B\hat{E}A = D\hat{C}B$. Por construção $A\hat{B}E = D\hat{B}C$, conclui-se que os triângulos $\Delta[ABE]$ e $\Delta[DBC]$ são semelhantes.

Considerando os lados homólogos, $\overline{AB}$ oposto ao $\angle E$ do primeiro triângulo é homólogo de $\overline{DB}$ oposto ao $\angle C$ no segundo triângulo e $\overline{AE}$ homólogo de $\overline{CD}$ por serem opostos dos ângulos congruentes por construção. E podemos então escrever a relação:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{AE}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{CD}$$

De forma análoga, concluímos que os triângulos $\Delta[ABD]$ e $\Delta[BCE]$ também são semelhantes, por serem congruentes os ângulos $A\hat{B}D = C\hat{B}E$ (a que se opõem os lados $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$) e os ângulos $D\hat{A}B = B\hat{E}C$ (a que se opõem os lados $\overline{BD}$ e $\overline{BC}$). E podemos escrever a relação:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{CE}.\overline{BD} = \overline{AD}.\overline{BC}$$

Somando ordenadamente as igualdades obtemos:

$$\overline{AE}.\overline{BD} + \overline{CE}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC}$$

$$(\overline{AE} + \overline{CE}).\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC}$$

$$\overline{AC}.\overline{BD} = \overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC}$$

C.q.d.

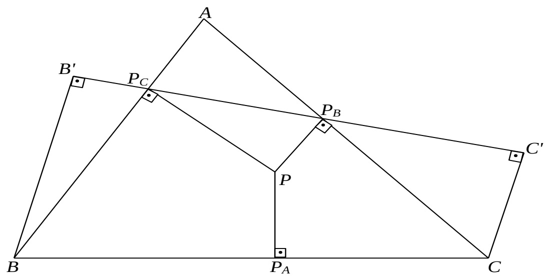
Uma aplicação do teorema acima é a

Desigualdade de Erdös-Mordell: *Se considerado um triângulo ABC e um ponto P do mesmo plano. Onde P_A, P_B, P_C são as projeções ortogonais de P nos lados $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ respectivamente. Vale então a desigualdade:*

$$2(\overline{PP_A} + \overline{PP_B} + \overline{PP_C}) \leq \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$$

*com igualdade se, e somente se, P for o circuncentro de um triângulo ABC eqüilátero***.**

Prova: Sejam B', C' pontos da reta $\overline{P_B P_C}$ tais que $\overline{BB'} // \overline{CC'} \perp \overline{P_B P_C}$.



Assim, observamos o trapézio retângulo $B'C'CB$, onde $\overline{B'C'}$ é a altura, temos:

$$\overline{BC} \geq \overline{B'C'}$$
$$\overline{BC} \geq \overline{B'P_C} + \overline{P_CP_B} + \overline{C'P_B}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $\overline{AP}$ obtemos:

$$\overline{AP}.\overline{BC} \geq \overline{AP}.(\overline{B'P_C} + \overline{P_CP_B} + \overline{C'P_B})$$
$$\overline{AP}.\overline{BC} \geq \overline{AP}.\overline{B'P_C} + \overline{AP}.\overline{P_CP_B} + \overline{AP}.\overline{C'P_B},$$

com igualdade se, e somente se, $\overline{P_BP_C} // \overline{BC}$.

Agora vamos relacionar cada uma das parcelas com o ponto *P*.

Comparando os triângulos ΔAPP_B e $\Delta P_BC'C$ percebemos que cada triângulo possui um ângulo reto. Além disso, o quadrilátero AP_BPP_C possui os ângulos $A\widehat{P_C}P$ e $A\widehat{P_B}P$ suplementares, logo está inscrito em uma circunferência e, portanto $P_C\hat{P}A = \frac{\widehat{P_CA}}{2} = A\widehat{P_B}P_C$, o ângulo $C\widehat{P_B}C'$ é oposto pelo vértice ao ângulo $A\widehat{P_B}P_C$, assim $P_C\hat{P}A = C\widehat{P_B}C'$ então concluímos que são semelhantes os triângulos ΔAPP_C e $\Delta P_BC'C$ pelo caso AA (ângulo, ângulo).

E deste modo obtemos as relações:

$$\frac{\overline{C'P_B}}{\overline{P_BC}} = \frac{\overline{P_CP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP}.\overline{C'P_B} = \overline{P_CP}.\overline{P_BC}$$

Também temos que os triângulos APP_B e $BB'P_C$ são semelhantes pelo caso AA, devido aos dois triângulos possuírem um ângulo reto e $A\hat{P}P_B = \frac{\widehat{AP_B}}{2} = A\widehat{P_C}P_B$, o ângulo $A\widehat{P_C}P_B$ é oposto pelo vértice ao ângulo $B'\widehat{P_C}B$ então temos $B'\widehat{P_C}B = A\hat{P}P_B$. E teremos outra relação:

$$\frac{\overline{B'P_C}}{\overline{P_CB}} = \frac{\overline{P_BP}}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \overline{AP}.\overline{B'P_C} = \overline{P_BP}.\overline{P_CB}$$

Considerando o quadrilátero AP_BPP_C, pelo Teorema de Ptolomeu, temos:

$$\overline{P_BP_C}.\overline{AP} = \overline{AP_B}.\overline{PP_C} + \overline{AP_C}.\overline{PP_B}$$

Substituindo as relações encontradas anteriormente na desigualdade, obtemos:

$$\overline{AP}.\overline{BC} \geq \overline{P_BP}.\overline{P_CB} + \overline{AP_B}.\overline{PP_C} + \overline{AP_C}.\overline{PP_B} + \overline{P_CP}.\overline{P_BC}$$
$$\overline{AP}.\overline{BC} \geq \overline{PP_C}.(\overline{AP_B} + \overline{P_BC}) + \overline{PP_B}.(\overline{P_CB} + \overline{AP_C})$$
$$\overline{AP}.\overline{BC} \geq \overline{PP_C}.\overline{AC} + \overline{PP_B}.\overline{AB}$$

com igualdade se, e somente se, $\overline{P_BP_C}$ // $\overline{BC}$.

Logo,

$$\overline{AP} \geq \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.\overline{PP_C} + \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.\overline{PP_B}.$$

Procedendo de forma análoga obtemos mais duas desigualdades:

$$\overline{BP} \geq \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.\overline{PP_C} + \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.\overline{PP_A}$$
$$\overline{CP} \geq \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}.\overline{PP_A} + \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}.\overline{PP_B}.$$

Somando as três desigualdades, temos:

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} \geq \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.\overline{PP_C} + \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.\overline{PP_B} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.\overline{PP_C} + \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.\overline{PP_A} + \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}.\overline{PP_A} + \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}}.\overline{PP_B}$$
$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} \geq \overline{PP_A}.\left(\frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}\right) + \overline{PP_B}.\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}\right) + \overline{PP_C}.\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right).$$

Por outro lado, a soma de um real positivo a com seu inverso $\frac{1}{a}$ é maior ou igual a 2, e esse valor só será dois se $a = 1$. De fato: seja $a \in R_+^*$, temos que:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0.$$

Logo, $\overline{PP_A}.\left(\frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} + \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}}\right) \geq \overline{PP_A}.2$, $\overline{PP_B}.\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}\right) \geq \overline{PP_B}.2$ e $\overline{PP_C}.\left(\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\right) \geq \overline{PP_C}.2.$
Então:

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} \geq 2(\overline{PP_A} + \overline{PP_B} + \overline{PP_C})$$

a igualdade ocorre se e apenas se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$.

C.q.d.

Um resultado imediato da desigualdade acima é que em um triângulo retângulo a altura relativa a hipotenusa é menor ou igual que a média aritmética da soma dos catetos.

4 CONCLUSÃO

Apesar da desigualdade de Erdös-Mordell não ser comum na literatura de livros didáticos de nível básico e superior concluímos que ela é de grande importância e que pode ser facilmente deduzida utilizando apenas ferramentas da geometria clássica.

5 REFERÊNCIAS

[1] MENDES, Marcelo. Quadriláteros e Triângulos. **Eureka**, Rio de Janeiro, nº 5, p.23 - 26, 1999.

[2] TORRES, Anderson. A Desigualdade de Erdös-Mordell. **Eureka**, Rio de Janeiro, nº18, p.41 – 52, 2003.

[3] http://www.geocities.ws/infinitesimos/matematica/mtmc/paulerdos.htm