AUTOVALORES E AUTOVETORES DE OPERADORES HERMITIANOS

BALBONI, Mauricio Dorneles Caldeira[1]; ILHA, Freddy da Paz[2];
AFONSO, Reginaldo Fabiano da Silva[3]; BECK, Vinicius Carvalho[4].

[1,2] *Alunos do Curso de Ciência da Computação - UFPEL*
freddyilha@gmail.com
Autor

[3] *Licenciado em Matemática - UFPEL*
Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura - UFRGS
Co-autor
regis.fab@gmail.com

[4] *Licenciado em Matemática - UFPEL*
Professor do Departamento de Matemática e Estatística - UFPEL
Orientador
vonoco@gmail.com

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é mostrar, a partir das propriedades das matrizes hermitianas e do produto interno complexo, que operadores hermitianos possuem apenas autovalores reais, e além disso, autovetores associados a autovalores distintos são dois a dois ortogonais.

Palavras-chave: operadores hermitianos, autovalores, autovetores.

1. INTRODUÇÃO

Desde que Halmos (1958) lançou as bases da álgebra linear moderna, muitos resultados interessantes floresceram desta teoria. As matrizes complexas desempenham um papel essencial em áreas tais como mecânica quântica (BARAVIERA, 2010) e engenharia elétrica (LEON, 2010), e por isto existem muitos estudos sobre operadores lineares em espaços vetoriais complexos, o que gera uma versão complexa da álgebra linear, tal como é descrita por Hoffman (1971). A seguir, serão apresentadas algumas definições e resultados básicos sobre operadores complexos.

Definição 1: Seja E um espaço vetorial complexo. Dizemos que uma aplicação $<,>: E \times E \to \mathbb{C}$ é um *produto interno*, se as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $u, v, w \in E$ e quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

(i) $< \lambda u + \mu v, w > = \bar{\lambda} < u, w > + \bar{\mu} < v, w >$

(ii) $< u, v > = \overline{< v, u >}$

(iii) $< u, u > \geq 0$

(iv) $< u, u > = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Como consequência imediata destas propriedades, tem-se $< \lambda u, w > = \bar{\lambda} < u, w >$, e também $< u, \lambda w > = \lambda < u, w >$. A partir de agora, vamos considerar apenas espaços vetoriais complexos com produto interno definido.

Definição 2: Dizemos que dois vetores u e v são *ortogonais*, se $< u, v > = 0$.

Definição 3: Sejam E e F espaços vetoriais complexos. Dizemos que uma aplicação $T: E \to F$ é uma *transformação linear complexa*, se as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $u, v \in E$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$:

(i) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$

(ii) $T(u + v) = T(u) + T(v)$

Definição 4: Chama-se *operador linear complexo* uma transformação linear complexa $T: E \to E$, isto é, uma transformação linear complexa que leva um espaço vetorial complexo nele mesmo.

Definição 5: Seja $T: E \to E$ um operador linear complexo. Chamamos de *operador adjunto de* T, o operador $T^*: E \to E$ tal que $< Tu, v > = < u, T^*v >$, para quaisquer $u, v \in E$.

Conforme descrito por Lima (1998), o adjunto de um operador linear é unicamente determinado, isto é, para todo operador $T: E \to E$, existe um único $T^*: E \to E$ tal que $< Tu, v > = < u, T^*v >$.

Definição 6: Dizemos que um operador linear $T: E \to E$ é *hermitiano* quando $T(v) = T^*(v)$, para todo $v \in E$.

Definição 7: Seja $T: E \to E$ um operador linear complexo. Dizemos que um vetor $v \neq 0 \in E$ é um *autovetor* de T, se existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T(v) = \lambda v$. Neste caso dizemos que λ é um *autovalor de* T *associado ao autovetor* v.

Cabe tecer alguns rápidos comentários sobre esta última definição. Cada autovalor está associado a uma infinidade de autovetores, na verdade um conjunto que é subespaço vetorial de E. Estes conjuntos de autovetores gerados por autovalores distintos são chamados na literatura de *subespaços invariantes* (LIMA, 1998).

2. MATERIAL E MÉTODOS

Utilizando propriedades dos operadores hermitianos e do produto interno complexo, deduz-se que os autovalores destes operadores são iguais aos seus conjugados, ou seja, são números reais. Utilizando os mesmos conceitos e propriedades, demonstra-se que o produto interno de dois autovetores associados a autovalores distintos de operadores hermitianos resulta em zero, ou seja, os autovetores são dois a dois ortogonais. A metodologia utilizada aqui é a mesma utilizada por Lima (1998) e Baraviera (2010).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Teorema 1: Seja T um operador hermitiano, então seus autovalores são todos reais.

Demonstração: Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de T associado ao autovetor v. Assim, temos satisfeita a igualdade $T(v) = \lambda v$. Vamos mostrar, através das propriedades do produto interno complexo, que esta condição só é satisfeita para valores de λ reais.

Tem-se que

$$< Tv, v > = < \lambda v, v > = \bar{\lambda} < v, v > \text{ (1).}$$

Por outro lado,

$$< Tv, v > = < v, T^*v >.$$

Como T é hermitiana, então $T^*v = Tv$. Daí resulta que

$$< Tv, v > = < v, T^*v > = < v, Tv > = < v, \lambda v > = \lambda < v, v > \text{ (2).}$$

Logo, de (1) e (2), obtém-se

$$\lambda < v, v > = \bar{\lambda} < v, v > \text{ (3).}$$

Como v é autovetor, e portanto não nulo, temos $< v, v > \neq 0$. Assim, podemos dividir ambos os lados da igualdade por $< v, v >$ em (3). Donde segue que $\lambda = \bar{\lambda}$. Mas apenas números reais possuem esta propriedade. Portanto, autovalores de operadores hermitianos são, necessariamente, números reais.

CQD.

Teorema 2: Seja T um operador hermitiano, e sejam u e v autovetores associados, respectivamente, a autovalores λ_1 e λ_2, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Então u e v são ortogonais.

Demonstração: Das propriedades do produto interno, segue que,

$$< Tu, v > = < \lambda_1 u, v > = \lambda_1 < u, v > \text{ (4).}$$

Por outro lado, também utilizando as propriedades do produto interno complexo, tem-se que

$$< Tu, v > = < u, Tv > = < u, \lambda_2 v > = \overline{\lambda_2} < u, v > = \lambda_2 < u, v > \text{ (5).}$$

De (4) e (5), resulta que

$$\lambda_1 < u, v > = \lambda_2 < u, v > .$$

Porém, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, logo, tem-se necessariamente $< u, v > = 0$, ou seja, u e v são ortogonais.

CQD.

4. CONCLUSÃO

A partir dos conceitos e resultados apresentados, concluí-se que operadores hermitianos possuem apenas autovalores reais, e os autovetores associados a autovalores distintos destes operadores, são necessariamente ortogonais.

REFERÊNCIAS BILIOGRÁFICAS

BARAVIERA, Alexandre T. **Introdução à Mecânica Quântica**. Publicações do 1º Colóquio de Matemática da Região Sul, Editora Pallotti, Santa Maria - RS, 2010.

HALMOS, Paul. **Finite Dimensional Vector Spaces**. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1958.

HOFFMAN, K; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Editora Polígono, São Paulo, 1971.

LEON, Steven J. **Linear Algebra With Applications**. 8th edition. Pearson Education Inc., Dartmounth, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 3º edição. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1998.