

## UMA NOVA ABORDAGEM ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO PARA MODELAR A DISPERSÃO DE POLUENTES NA BAIXA ATMOSFERA

**CONTREIRA, Juliana Ávila<sup>1</sup>; BUSKE, Daniela<sup>2</sup>; QUADROS, Régis<sup>2</sup>;  
GONÇALVES, Glênio Aguiar<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas - UFPEL, graduação em Engenharia Civil; <sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas - UFPEL, IFM/DME ; julianacontreira@hotmail.com

### 1 INTRODUÇÃO

A dispersão de poluentes liberados continuamente na camada limite atmosférica é um problema complexo devido à natureza da turbulência nas fronteiras e as condições meteorológicas tais como vento e inversão de temperatura. Quando o poluente é liberado na atmosfera, a evolução de sua concentração é determinada pelos vórtices turbulentos e pelo perfil do vento que caracterizam a dinâmica atmosférica.

Os modelos matemáticos são instrumentos particularmente úteis no entendimento e descrição dos fenômenos que determinam a forma e evolução da pluma de poluentes. Um modelo, que tem sido amplamente usado para descrever a dispersão de poluentes na atmosfera no sistema de coordenadas Euleriano, é dado pela equação de advecção-difusão. Um número significativo de soluções analíticas desta equação é encontrado na literatura. Entretanto, estas são válidas para problemas específicos, assumindo geralmente perfil de vento e coeficientes de difusão constantes ou com dependências simples em relação às variáveis espaciais (BERLYAND, 1975; DEMUTH, 1978; ROUNDS, 1955).

Nos últimos anos, vários esforços têm sido realizados na direção de se obter soluções analíticas para perfil de vento e coeficientes de difusão mais realistas. Neste contexto, na última década surgiu na literatura a técnica analítica GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*) (MOREIRA et al., 2009). Esta tem sido desenvolvida para descrever a dispersão de poluentes na microescala e é válida para qualquer perfil de vento e coeficiente de difusão vertical variável com a altura.

### 2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO

Consideremos a equação de advecção-difusão bidimensional que descreve a dispersão de poluentes na atmosfera que é escrita como:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (1)$$

onde C é a concentração integrada de poluente (g/m<sup>2</sup>), K<sub>z</sub> é o coeficiente de difusão vertical (m<sup>2</sup>/s), u é a componente da velocidade média do vento na direção x (m/s). A equação (1) está sujeita às condições de contorno de fluxo nulo no solo e no topo da camada limite:

$$k_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0 \text{ e } z = h, \quad (1a)$$

e sujeita a condição de fonte representada por uma delta de Dirac dada por:

$$u C(0, z) = Q \delta(z - H_s) \quad (1b)$$

na qual H<sub>s</sub> é a altura da fonte (m) e Q é a taxa de emissão (g/s).

A técnica GILTT é um método analítico que propõe uma expansão em somatório de uma base de funções cosseno na variável vertical  $z$ , base esta advinda da solução de um problema auxiliar de Sturm-Liouville. Esta expansão é substituída na equação de advecção-difusão e, tomando-se momentos, resulta em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO). A solução do sistema EDO é feita analiticamente, aplicando a transformada de Laplace na variável espacial  $x$  e utilizando diagonalização de matrizes.

O presente trabalho tem o objetivo de comparar a solução do problema (1), obtida pelo método analítico GILTT conforme descrito em (MOREIRA et al., 2009), com a solução exata obtida em termos de uma série de Bessel Fourier.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como um exemplo de aplicação, consideremos os dados do experimento de Copenhagen (GRYNING E LYCK, 1984). Os experimentos de dispersão consistiram na liberação do traçador  $SF_6$  (hexafluoreto de enxofre) ao norte de Copenhagen. É um experimento de fonte alta ( $H_s=115m$ ) e fortemente convectivo. Durante o experimento considerado temos um vento  $u = 4,2m/s$  que foi medido na altura  $z=10m$  e altura da camada limite  $h = 810m$ .

A técnica GILTT é válida para qualquer perfil de vento e coeficiente de difusão variáveis com a altura. Assim, consideramos neste trabalho que o coeficiente de difusão e o perfil de vento sejam descritos por uma lei da potência,  $K_z = 1,77z^{0,45}$  (KUMAR E SHARAN, 2009),  $u(z) = u(10) \left(\frac{z}{10}\right)^\alpha$  onde  $u(10)$  é a velocidade média do vento durante o experimento 8 de Copenhagen. O expoente  $\alpha = 0.1$  é um valor relacionado com a estabilidade atmosférica (PANOFSKY E DUTTON, 1984). Neste caso a solução da componente em  $z$  existente na literatura é dada por uma combinação linear do produto de potências de  $z$  por funções de Bessel de primeira espécie de ordem  $\mu$ , na forma:

$$z^{(1-\frac{\alpha}{2})} J_\mu \left( \lambda_n h^{-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} z^{(1-\frac{\alpha}{2})} \right) \quad (2)$$

onde  $\mu = \frac{-\alpha+1}{\alpha-2}$  e  $\lambda_n$  é a  $n$ -ésima raiz positiva da função de Bessel de primeira espécie de ordem  $\nu = \frac{1}{2-\alpha}$ ,  $J_\nu$ . Os resultados foram obtidos usando um código computacional escrito em linguagem FORTRAN.

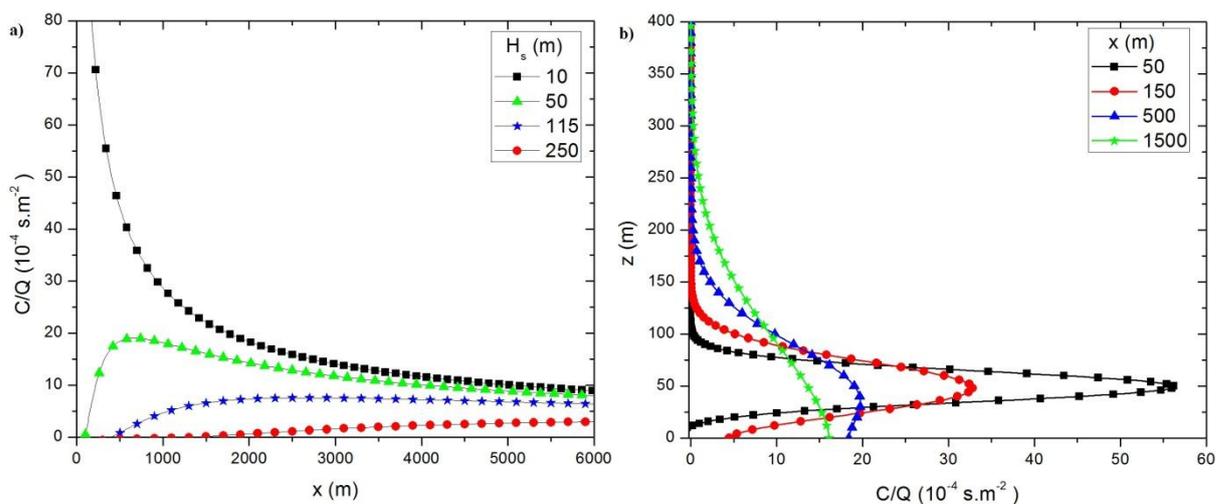
Na Tabela (1) mostra-se o comportamento dos resultados, como uma função da soma das  $N$  autofunções, da concentração de poluentes normalizada pela taxa de emissão  $Q$  para diferentes distâncias da fonte. Foram consideradas as bases Cosseno e Bessel na solução do problema via GILTT e os resultados são comparados com a solução exata. Podemos observar uma clara convergência numérica dos resultados da concentração de poluentes, com o aumento do número de autovalores associados, para ambas as bases. Também podemos observar uma convergência mais rápida da base Bessel em todos os casos, principalmente para distâncias próximas a fonte, como é o caso de  $x=500m$ .

É muito importante ter conhecimento da distância da fonte onde ocorre a concentração máxima de poluentes. Para isto, na Figura (1a) analisa-se o gráfico da concentração ao nível do solo em função da posição para diferentes alturas de fonte ( $H_s = 10; 50; 115; 250m$ ). Para a altura  $H_s = 10m$  é verificado um pico acentuado na área próxima à fonte. Com o crescimento da altura da fonte, observam-se um decaimento do pico e uma diferente localização do mesmo (como esperado, a

dispersão é maior pois a chaminé está mais alta). Na Figura (1b), apresentam-se os perfis verticais de concentração para quatro distâncias ( $x = 50; 150; 500; 1500\text{m}$ ) para uma altura de fonte  $H_s = 115\text{m}$ . Estes gráficos apresentam valores maiores de concentração para distâncias menores, decaindo com o crescimento da distância. Além disso, com o crescimento da distância, há uma tendência à obtenção de um perfil homogêneo de concentração. Podemos observar que para ambas as bases, Cosseno (símbolos no gráfico) e Bessel (linhas no gráfico), o comportamento da solução é análogo.

**Tabela 1:** Convergência numérica da concentração de poluentes em função do aumento do número de autovalores.

		Bessel ( $C/Q (10^{-4} \text{ s.m}^{-2} )$ )				
Autovalores		10	20	50	100	Exata
distancia(m)						
500		1,39500971	1,39791482	1,40385894	1,40289373	1,40702258
1000		5,03102965	5,01838025	5,02238146	5,02177281	5,02439802
1500		6,84217126	6,83735501	6,84063134	6,84015668	6,84216175
2000		7,54614126	7,54195863	7,54476588	7,54436528	7,54601826
		Cosseno ( $C/Q (10^{-4} \text{ s.m}^{-2} )$ )				
Autovalores		10	20	50	100	Exata
distancia(m)						
500		1,02209859	1,71481970	1,44733649	1,41920519	1,40702258
1000		5,41584404	5,22772480	5,05603327	5,03296052	5,02439802
1500		7,04523075	6,93843042	6,85595271	6,84584482	6,84216175
2000		7,61980098	7,58851581	7,55100141	7,54735336	7,54601826



**Figura 1:** a) concentração de poluentes como uma função da distância da fonte para diferentes alturas de fonte. b) perfil vertical da concentração de poluentes para diferentes distâncias da fonte. Os símbolos referem-se à base Cosseno e as linhas à base Bessel.

## 4 CONCLUSÃO

Os resultados apresentados neste trabalho mostram um bom comportamento da solução GILTT utilizando diferentes bases. Além disso, os resultados mostram que as soluções convergem rapidamente para os valores encontrados na literatura, e que a solução com a base Bessel converge mais rapidamente. Nosso próximo objetivo será testar novos coeficientes de difusão, que representem de uma maneira mais completa o processo turbulento.

**AGRADECIMENTOS:** Os autores agradecem ao CNPq e a FAPERGS pelo apoio financeiro parcial deste trabalho.

## 5 REFERÊNCIAS

BERLYAND, M.Y., Contemporary problems of atmospheric diffusion and pollution of the atmosphere. "Translated version by NERC", USEPA, Raleigh, NC, U.S.A. (1975).

DEMUTH, C., A contribution to the analytical steady solution of the diffusion equation for line sources. *Atmos. Environ.* 12 (1978) 1255-1258.

GRYNING, S.E., LYCK, E.. Atmospheric dispersion from elevated source in an urban area: comparison between tracer experiments and model calculations. *J. Appl. Meteor.* 23 (1984) 651-654.

KUMAR, P., SHARAN, M.. An analytical model for dispersion of pollutants from a continuous source in the atmospheric boundary layer. *Proc. Royal Society A* 466 (2009) 383-406.

MOREIRA, D.M., VILHENA, M.T., BUSKE, D., TIRABASSI, T.. The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. *Atmos. Research* 92 (2009) 1-17.

PANOFSKY, H.A. AND DUTTON, J.A.. "Atmospheric Turbulence". John Wiley & Sons, New York (1984).

ROUNDS, W., Solutions of the two -dimensional diffusion equation. *Trans. Am. Geophys. Union* 36 (1995) 395-405.