

UMA SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA A EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO BIDIMENSIONAL UTILIZANDO COMO BASE FUNÇÕES DE BESSEL

CEZIMBRA, Renata Andrade da Silva¹; BUSKE, Daniela²; GONÇALVES, Glênio Aguiar²; QUADROS, Régis²

¹Universidade Federal de Pelotas – UFPel, Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental;

²Universidade Federal de Pelotas – UFPel, Instituto de Física e Matemática.
renatacezimbra@hotmail.com

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento industrial e tecnológico das últimas décadas aumentou os problemas ambientais relacionados à poluição do ar provocada por emissões de contaminantes na atmosfera. Devido ao caráter turbulento do campo de vento na camada limite atmosférica (CLA), torna-se extremamente difícil o estudo da dispersão e do transporte de contaminantes na atmosfera. Na literatura encontram-se disponíveis inúmeros trabalhos que se concentram no estudo da dinâmica da CLA, em que são considerados diversos modelos para fechamento das equações dos fluxos turbulentos tais como: modelos de primeira ordem ou teoria K, segunda ordem ou superior. A maneira mais utilizada para solucionar o problema de fechamento da equação de advecção-difusão é baseada na hipótese de transporte por gradiente (ou teoria K) que, em analogia com a difusão molecular, assume que o fluxo turbulento de concentração é proporcional à magnitude do gradiente de concentração média. Na estimativa do campo de concentração de poluentes na baixa atmosfera, emprega-se, normalmente, a equação de advecção-difusão, que é obtida a partir da parametrização dos fluxos turbulentos na equação da continuidade de movimento, sendo que os modelos Eulerianos de dispersão têm como característica a solução desta. Na maioria dos casos encontrados na literatura, esta equação é resolvida analiticamente apenas em situações extremamente simplificadas, quase sempre com coeficientes de difusão constantes, lineares ou em potência.

Problemas de engenharia mais elaborados, geralmente, recaem em equações diferenciais parciais mais complexas que raramente possuem solução analítica sendo necessária a utilização de métodos numéricos ou analítico-numéricos para a obtenção dos potenciais desejados. Embora as soluções numéricas estejam muito avançadas, a busca de soluções analíticas para problemas de dispersão é de grande relevância, pois permite uma análise profunda da sensibilidade dos parâmetros sobre o modelo, uma vez que estes são explicitamente expressos em uma forma matemática fechada. Além disso, códigos computacionais baseados em expressões analíticas não necessitam de grandes recursos computacionais.

2 METODOLOGIA

Sabemos que as soluções analíticas podem ser expressas na forma integral ou com uma formulação em série (MOREIRA ET AL., 2010). O teorema de Cauchy-Kowalewsky (COURANT, 1989) garante a existência e unicidade de uma solução analítica para a equação de advecção-difusão. Na última década surgiu a técnica analítica *Generalized Integral Laplace Transform Technique* (GILTT) (MOREIRA ET AL., 2009), que resolve a equação de advecção-difusão usando uma combinação da

transformada de Laplace com a técnica GITT (Técnica da Transformada Integral Generalizada) (COTTA,1993).

Consideremos a equação de advecção-difusão bidimensional que descreve a dispersão de poluentes na atmosfera escrita como:

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (1)$$

onde C é a concentração integrada em y (g/m^2), K_z é o coeficiente de difusão vertical (m^2/s) e u é a componente da velocidade média do vento na direção x (m/s). A equação (1) está sujeita às condições de contorno de fluxo nulo de poluente no solo e no topo da camada limite ($k_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0$ em $z = 0$ e $z = h$) e sujeita a condição de fonte $u C(0, z) = Q \delta(z - H_s)$, na qual H_s é a altura da fonte (m) e Q é a taxa de emissão do poluente (g/s).

Utilizando a formulação GILTT, a solução do problema (1) é escrita como uma expansão em série de cossenos na variável vertical z, base esta construída a partir da solução de um problema auxiliar de Sturm-Liouville da forma

$$\frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} + \lambda^2 \varphi(z) = 0 \quad (2)$$

cujas soluções são conhecidas e dadas pelas autofunções $\varphi(z) = \cos(\lambda_n z)$, e $\lambda_n = n\pi/h$ ($n=0,1,2,\dots$) são os respectivos autovalores e h é altura da camada limite. Esta solução em série é então substituída na equação de advecção-difusão e, tomando-se momentos, resulta em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem. A solução do sistema EDO é feita analiticamente, aplicando a transformada de Laplace na variável espacial x e utilizando diagonalização de matrizes. Cabe enfatizar que a ideia central da técnica GILTT é a expansão da solução em funções cossenos (WORTMANN ET AL., 2005, MOREIRA ET AL., 2009).

Neste trabalho, explora-se o uso de uma forma diferente de expansão para a solução da equação de advecção-difusão. Em outras palavras, propõe-se outro problema auxiliar de Sturm-Liouville como gerador da base utilizada na expansão em série. A ideia desta proposição fundamenta-se no reconhecimento de que, na GILTT, o problema auxiliar (1) tem justamente a forma da EDO, relativa à variável z, que surge no método de separação de variáveis, quando da solução da equação para coeficiente de difusão vertical constante. Isto sugere a possibilidade de uso de outro problema auxiliar dado pela EDO resultante do método de separação de variáveis com coeficiente de difusão vertical linear, $K_z = z$, em que a é uma constante positiva, dado por

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{d\zeta(z)}{dz} \right) + \eta^2 \zeta(z) = 0 \quad (3)$$

As soluções desta EDO são funções de Bessel de primeira espécie de ordem zero da forma $J_0(\lambda_n \sqrt{z/h})$, onde λ_n é a n-ésima raiz positiva da função de Bessel de primeira espécie de ordem um, J_1 .

O reconhecimento de que o problema de Sturm-Liouville surge dentro da própria equação de advecção-difusão, no método da separação de variáveis, autoriza o uso de uma nova solução em termos de funções de Bessel na expansão proposta pela GILTT e abre a possibilidade de investigação de outras bases que possam ser, em circunstâncias específicas, mais convenientes do que a base em cossenos.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como um exemplo de aplicação, consideremos os dados do experimento de Copenhagen (GRYNING E LYCK, 1984). Os experimentos de dispersão consistiram na liberação do traçador SF₆ (hexafluoreto de enxofre) ao norte de Copenhagen. É um experimento de fonte alta (H_s=115m) e fortemente convectivo. Durante o experimento considerado, temos um vento constante u = 4,2m/s e altura da camada limite h = 810m. A concentração de poluentes é medida ao nível do solo (z = 1m). Nas simulações foram utilizados um coeficiente de difusão turbulenta linear escrito como K_z = 2,5z e um perfil de vento potência. Os resultados foram obtidos usando um código computacional escrito em linguagem FORTRAN.

Na tabela (1) mostra-se o comportamento dos resultados, como uma função da soma das N autofunções, da concentração de poluentes normalizada pela taxa de emissão Q para diferentes distâncias da fonte. Para visualizar melhor o que acontece no início das simulações utilizamos na figura (1) a distância de 500m da fonte e N=20 autovalores associados. Podemos observar uma clara convergência numérica dos resultados da concentração de poluentes, com o aumento do número de autovalores, para ambas as bases. Também podemos observar uma convergência mais rápida da base Bessel em todos os casos, principalmente para distâncias próximas a fonte, como é o caso de x=500m. Note que, utilizando a base Bessel, bastariam 10 autofunções para obtermos uma boa precisão em qualquer uma das distâncias mostradas na tabela 1.

Tabela 1: Convergência numérica da concentração de poluentes em função do aumento do número de autovalores.

		Bessel (C/Q (10⁻⁴ s.m⁻²))				
		5	10	20	50	100
Autovalores	distancia(m)					
	500	4,57672355	4,83330164	4,83260338	4,83267952	4,83267405
	1900	2,22884909	2,22857064	2,22853321	2,22853729	2,22853699
	3600	2,08764482	2,08763702	2,08763598	2,08763609	2,08763608
	5300	2,08369018	2,08368996	2,08368994	2,08368994	2,08368994
		Cosseno (C/Q (10⁻⁴ s.m⁻²))				
		5	10	20	50	100
Autovalores	distancia(m)					
	500	4,57672355	4,71036732	4,77656064	4,81302673	4,82116537
	1900	2,21482504	2,22196841	2,22551083	2,22746211	2,22789746
	3600	2,08725284	2,08745288	2,08755208	2,08760672	2,08761891
	5300	2,08368042	2,08368602	2,08368880	2,08369033	2,08369067

4 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos neste trabalho sugerem uma convergência mais rápida dos resultados utilizando a base Bessel na resolução do problema proposto. Nosso

próximo passo é testar outros coeficientes de difusão, bem como utilizar um perfil de vento variável com a altura, de forma a representar o processo de dispersão de maneira mais realista e adequada. Também se pretende, após obter autorização legal, utilizar dados de experimentos realizados na região de Candiota no Rio Grande do Sul.

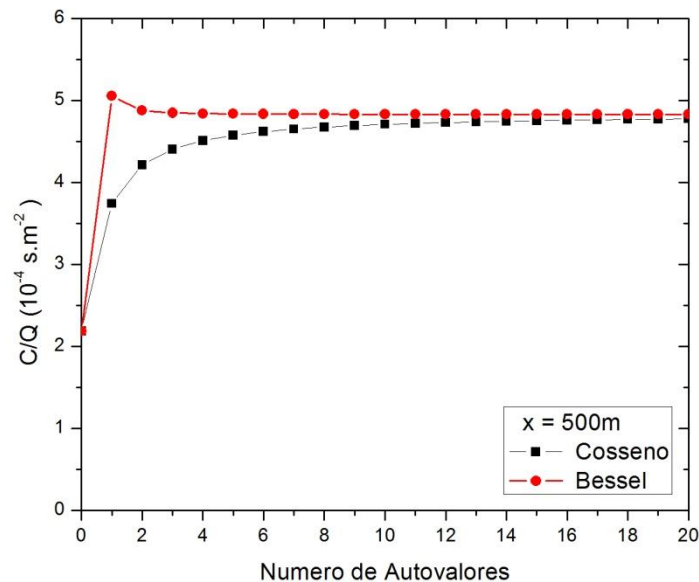


Figura 1: Convergência numérica da concentração de poluentes para a distância de 500m da fonte e N=20 autovalores.

AGRADECIMENTOS: Os autores agradecem a FAPERGS pelo apoio financeiro parcial deste trabalho.

5 REFERÊNCIAS

- COTTA, R.. **Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1993.
- COURANT, R., HILBERT, D.. **Methods of Mathematical Physics**. John Wiley & Sons, 1989.
- GRYNING, S.E., LYCK, E.. Atmospheric dispersion from elevated source in an urban area: comparison between tracer experiments and model calculations. **J. Appl. Meteor.** 23 (1984) 651-654.
- MOREIRA, D.M., VILHENA M.T., BUSKE D., TIRABASSI, T., The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. **Atmos. Research**, 92 (2009) 1-17.
- MOREIRA, D.M., VILHENA, M.T., TIRABASSI, T., BUSKE ,D., COSTA, C.P.. Comparison between analytical models to simulate pollutant dispersion in the atmosphere. **Int. J. Environ. And Waste Manag.**, 6 (2010) 327-344.
- WORTMANN, S., VILHENA, M.T., MOREIRA, D.M., BUSKE, D.. A new analytical approach to simulate the pollutant dispersion in the PBL. **Atmos. Environ.** 39 (2005) 2187-2194.