A SEQUÊNCIA DAS DIFERENÇAS DE ORDEM M DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

BORCHARDT, Thiago Tavares[1]; BECK, Vinicius Carvalho[2];
KREBS, Paulo Roberto[3];

[1] Graduando do curso de Licenciatura em Matemática - UFPEL
Autor
thiago-tb@hotmail.com

[2] Licenciado em Matemática - UFPEL
Professor do Departamento de Matemática e Estatística - UFPEL
Orientador
vonoco@gmail.com

[3] Doutor em Física - UFRGS
Professor do Departamento de Física - UFPEL
Co-orientador
krebs@ufpel.edul.br

RESUMO

Este trabalho pretende apresentar uma fórmula geral para as sequências de diferenças sucessivas dos termos da seqüência de Fibonacci. A expressão geral desta fórmula é demonstrada no contexto da Teoria dos Números, por meio do segundo princípio de indução. É possível que tal expressão não seja conhecida (os autores não encontraram na literatura evidências de que exista uma fórmula para calcular diferenças da seqüência de Fibonacci), e se for, pode-se pelo menos afirmar que não é amplamente divulgada, de modo que a dedução aqui apresentada é totalmente original e independente.

Palavras-chave: diferenças, sequência de Fibonacci, ordem m.

1. INTRODUÇÃO

Desde que Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci (filho de boa gente, em italiano), enunciou seu famoso problema sobre o crescimento de populações de coelhos por volta de 1202 em seu *Livro dos Ábacos*, muitas propriedades e aplicações interessantes desta sequência de números foram descobertas.

O problema que Fibonacci lançou em seu livro era o seguinte: Quantos coelhos poderiam ser reproduzidos em um ano, a partir de um único casal, levando em consideração que cada coelho só pode reproduzir após um mês de idade, cada casal gera sempre outro casal de coelhos, e nenhum coelho morre durante o ano.

De acordo com as condições do problema, deduz-se que esta seqüência é dada por $(0,1,1,2,3,5,8,13,\dots)$, isto é, cada termo é a soma dos dois anteriores, começando por 0 e 1.

A seguir, veremos o que acontece quando calculamos as diferenças sucessivas dos termos da seqüência de Fibonacci, e o que acontece se continuamos a calcular diferenças destas diferenças.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Definição 1 (sequência de Fibonacci): A *Sequência de Fibonacci*, de termos F_n é uma sequência onde $F_1 = 0$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Definição 2 (sequência das diferenças da sequência de Fibonacci): A *Sequência das Diferenças de primeira ordem da Sequência de Fibonacci* é uma sequência de termos d_n, onde $d_n = F_{n+1} - F_n$, para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definição 3 (sequência das diferenças de ordem m da sequência de Fibonacci): A *Sequência das Diferenças de ordem m da Sequência de Fibonacci* é uma Sequência de termos d_n^m, onde $d_n^0 = F_n$, $d_n^1 = d_n$ e

$d_n^m = d_{n+1}^{m-1} - d_n^{m-1}$ para $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

$d_n^0 = (0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584, \dots)$

$d_n^1 = (1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584, \dots)$

$d_n^3 = (2,-1,1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597 \dots)$

Definição 4 (razão dourada e o oposto de seu conjugado): Chamamos $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ de *razão dourada* e $\phi' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ de *oposto do conjugado da razão dourada*.

Propriedades Aritméticas da razão dourada e do oposto de seu conjugado:

$$P1: 1 - \phi' = (\phi')^2$$
$$P2: 1 + \phi = \phi^2$$
$$P3: 1 + \phi = (-\phi)^2$$
$$P4: -\phi - \phi' = (\phi')^2 - (-\phi)^2$$
$$P5: \phi - 1 = \phi^{-1}$$
$$P6: -\phi' - 1 = (-\phi')^{-1}$$

Definição 5 (definição alternativa da sequência de Fibonacci): A *Sequência de Fibonacci*, de termos F_n, é sequência definida pela expressão $F_n = \frac{\phi^n - (-\phi')^n}{\sqrt{5}}$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Teorema (fórmula das diferenças de Fibonacci):

$$d_n^m = \begin{cases} \dfrac{\phi^{n-m} - (-\phi')^{n-m}}{\sqrt{5}}, \text{ se } n \geq m \\ \dfrac{(\phi')^{m-n} - (-\phi)^{m-n}}{\sqrt{5}}, \text{ se } n < m \end{cases}$$

Demonstração: (segundo princípio de indução)

Vamos mostrar que: i) A fórmula vale para $m = n = 0$; ii) Se $m = 0$, então a fórmula vale quando variamos n; e iii) Se fixamos n, a fórmula vale quando variamos m.

i) Se $m = n = 0$, então $d_n^m = d_0^0 = F_0 = 0 = \frac{\phi^{0-0}-(-\phi')^{0-0}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n-m}-(-\phi')^{n-m}}{\sqrt{5}}$, o que está de acordo com a fórmula no caso em que $n \geq m$.

ii) Se $m = 0$, então $d_n^m = d_m^0 = F_n$. Como, neste caso temos $n \geq m$, devemos provar que se $d_{n-1}^m = \frac{\phi^{(n-1)-m}-(-\phi')^{(n-1)-m}}{\sqrt{5}}$, então $d_n^m = \frac{\phi^{n-m}-(-\phi')^{n-m}}{\sqrt{5}}$. Mas sabemos que os termos da sequência de Fibonacci podem ser determinados pela fórmula $F_n = \frac{\phi^n-(-\phi')^n}{\sqrt{5}}$. Logo, independentemente da hipótese $d_{n-1}^m = \frac{\phi^{(n-1)-m}-(-\phi')^{(n-1)-m}}{\sqrt{5}}$, quando $m = 0$ temos sempre satisfeita a igualdade $d_n^m = \frac{\phi^{n-m}-(-\phi')^{n-m}}{\sqrt{5}}$, pois $d_n^m = d_m^0 = F_n = \frac{\phi^n-(-\phi')^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n-0}-(-\phi')^{n-0}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n-m}-(-\phi')^{n-m}}{\sqrt{5}}$.

iii) Supomos que $d_n^{m-1} = \begin{cases} \frac{\phi^{n-(m-1)}-(-\phi')^{n-(m-1)}}{\sqrt{5}}, \text{ se } n \geq m-1 \\ \frac{(\phi')^{(m-1)-n}-(-\phi)^{(m-1)-n}}{\sqrt{5}}, \text{ se } n < m-1 \end{cases}$. A fim de demonstrar que tal expressão também é válida para m, vamos analisar todas as possibilidades de relação entre n e m: $n \leq m-3$, $n = m-2$, $n = m-1$ e $n \geq m$.

1º caso ($n \leq m-3$):

$$d_n^m = d_{n+1}^{m-1} - d_n^{m-1} =$$

$$\text{(HI)} = \frac{(\phi')^{(m-1)-(n+1)} - (-\phi)^{(m-1)-(n+1)}}{\sqrt{5}} - \frac{(\phi')^{(m-1)-n} - (-\phi)^{(m-1)-n}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\phi')^{m-n-2}}{\sqrt{5}} - \frac{(-\phi)^{m-n-2}}{\sqrt{5}} - \frac{(\phi')^{m-n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-\phi)^{m-n-1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\phi')^{m-n-2}(1-\phi')}{\sqrt{5}} - \frac{(-\phi)^{m-n-2}(1-(-\phi))}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\phi')^{m-n-2}(1-\phi')}{\sqrt{5}} - \frac{(-\phi)^{m-n-2}(1+\phi)}{\sqrt{5}}$$

$$\text{(P1 e P3)} = \frac{(\phi')^{m-n-2}(\phi')^2}{\sqrt{5}} - \frac{(-\phi)^{m-n-2}(-\phi)^2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\phi')^{m-n} - (-\phi)^{m-n}}{\sqrt{5}}$$

2º caso ($n = m-2$):

$$d_n^m = d_{n+1}^{m-1} - d_n^{m-1} = d_{m-1}^{m-1} - d_{m-2}^{m-1}$$

$$\text{(HI)} = \frac{\phi^0 - (-\phi')^0}{\sqrt{5}} - \frac{\phi' - (-\phi)}{\sqrt{5}} = \frac{-\phi - \phi'}{\sqrt{5}}$$

$$\text{(P4)} = \frac{(\phi')^2 - (-\phi)^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\phi')^{m-n} - (-\phi)^{m-n}}{\sqrt{5}}$$

3º caso ($n = m-1$):

$$d_n^m = d_{n+1}^{m-1} - d_n^{m-1} = d_m^{m-1} - d_{m-1}^{m-1}$$

$$\text{(HI)} \ = \frac{\phi - \left(-\phi'\right)}{\sqrt{5}} - \frac{\phi^{0} - \left(-\phi'\right)^{0}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi - \left(-\phi'\right)}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\phi^{1} + (\phi')^{1}}{\sqrt{5}} = \frac{(\phi')^{m-n} - (-\phi)^{m-n}}{\sqrt{5}}$$

4º caso ($n \geq m$):

$$d_n^m = d_{n+1}^{m-1} - d_n^{m-1} =$$
$$\text{(HI)} \ = \frac{\phi^{(n+1)-(m-1)} - (-\phi')^{(n+1)-(m-1)}}{\sqrt{5}} - \frac{(\phi')^{n-(m-1)} - (-\phi)^{n-(m-1)}}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\phi^{n-m+2}}{\sqrt{5}} - \frac{(-\phi')^{n-m+2}}{\sqrt{5}} - \frac{(\phi')^{n-m+1}}{\sqrt{5}} + \frac{(-\phi)^{n-m+2}}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\phi^{n-m+1}(\phi - 1) - \left(-\phi'\right)^{n-m+1}(-\phi' - 1)}{\sqrt{5}}$$
$$\text{(P5 e P6)} \ = \frac{\phi^{n-m+1}\phi^{-1} - \left(-\phi'\right)^{n-m+1}(-\phi')^{-1}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n-m} - (-\phi')^{n-m}}{\sqrt{5}}$$

4. CONCLUSÃO

Por fim, devido aos resultados utilizados e à demonstração apresentada acima, podemos concluir que $d_n^m = \begin{cases} \frac{\phi^{n-m} - (-\phi')^{n-m}}{\sqrt{5}}, \text{ se } n \geq m \\ \frac{(\phi')^{m-n} - (-\phi)^{m-n}}{\sqrt{5}}, \text{ se } n < m \end{cases}$.

O processo de prova mostrado salienta a importância das ferramentas da matemática discreta tais como a indução matemática e apresenta uma solução da equação em diferenças em duas variáveis $d_n^m = d_{n+1}^{m-1} - d_n^{m-1}$, tendo como condição inicial os termos d_n^0 da sequência de Fibonacci.

REFERÊNCIAS

[1] KUMER, Pradeep; IVANOV, Plamen Ch.; STANLEY, H. Eugene. **Information Entropy and Correlations in Prime Numbers**. arXiv: cond-mat/0303110, October 18, 2007.

[2] SZPIRO, George G.. **The gaps between the gaps: some patterns in the prime number sequence**. Physica A 341 (2004) 607-617.

[3] de ALENCAR, Maria Efigênia Gomes. **O número ϕ e a sequência de Fibonacci**. Física na Escola, V.5, n. 2, 2004.

[4] HUNTLEY, H. E..**The Divine Proportion: a study in mathematical beauty.** Dover Publications, New York, 1970.