INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS PONDERADOS

VAZ, Rodrigo Gonçalves[1]; BECK, Vinicius Carvalho[2].

[1] *Aluno do Curso de Engenharia do Petróleo - UFPEL*
Autor
rodrigovaz_sg@hotmail.com

[2] *Licenciado em Matemática - UFPEL*
Departamento de Matemática e Estatística - UFPEL
Orientador
vonoco@gmail.com

RESUMO

O objetivo deste trabalho é introduzir o Método dos Mínimos Quadrados Ponderados. Este método pode ser usado para construir funções que modelam fenômenos de diferentes naturezas a partir de dados observacionais, sendo particularmente útil para fenômenos nos quais algumas medidas são mais precisas do que outras.

Palavras-chave: mínimos quadrados, mínimos quadrados ponderados, Gauss.

1. INTRODUÇÃO

Em 1795, Carl Friedrich Gauss publicou um método para inferir a regra matemática que descrevia o movimento de cometas, caracterizado-o por seis parâmetros, a partir de dados observacionais de telescópios (SORENSON, 1970). Tal técnica ficou conhecida como Método dos Mínimos Quadrados (MQ).

Ao longo dos anos, estudiosos da teoria da estimação desenvolveram novas versões do MQ, tais como Mínimos Quadrados Ponderados (MQP) e Mínimos Quadrados Ponderados com Recursividade (MQR). Neste trabalho será introduzido o MQP.

O teorema a seguir fornece a solução para o problema de minimizar o erro de medidas observacionais y relacionadas a valores verdadeiros x desconhecidos. Este problema também é conhecido na literatura como "o problema dos mínimos quadrados".

Teorema: Sejam $Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e $X \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ matrizes, cujas colunas formam um conjunto linearmente independente, com $m \leq n$. Então existe uma única matriz $\hat{A}$ tal que

$$\|Y - X\hat{A}\| \leq \|Y - XA\|, \forall A \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R}).$$

Além disso, tem-se que

$$\hat{A} = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Para maior detalhamento matemático a respeito da dedução das equações do MQ e suas extensões mais sofisticadas, recomenda-se Gonçalves (2005).

Cabe aqui tecer um rápido comentário: Por que o quadrado do erro? Por que se o valor bruto do erro fosse considerado, correria-se o risco de se obter zero para observações com margem de erro iguais, tanto para mais quanto para menos, o que não estaria de acordo com a realidade. Alternativamente, poderíamos considerar o módulo em vez do quadrado, mas isto afetaria a diferenciabilidade, o que não seria interessante para minimização. Assim, parece que minimizar o quadrado realmente foi a solução mais simples e eficaz.

Com o auxílio de técnicas de discretização (HOFFMAN, 1992) e ferramentas sofisticadas de teoria da estimação, é possível derivar métodos mais sofisticados, como por exemplo o Filtro de Kalman, que atualmente é utilizado para assimilação de dados em dinâmica não-linear (HÄRTER, 2007), correção de órbitas de satélites artificiais e robótica móvel (RIBEIRO, 2003).

O MQP pode ser aplicado a qualquer modelo, desde que se conheça a covariância dos erros de observação, isto é, desde que a imprecisão da coleta de dados seja conhecida.

2. MATERIAL E MÉTODOS

A metodologia para a obtenção dos mínimos quadrados ponderados é introduzir nas equações da estimativa uma matriz que descreve a precisão de cada observação, conforme descrito por Härter (2007).

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O Método dos Mínimos Quadrados Ponderados (MQP) é uma extensão do MQ que utiliza pesos para as medidas quando algumas medidas y são mais precisas do que outras. Por exemplo, se y_1 é mais precisa do que y_2, então maior peso deve ser atribuído a y_1. Neste caso, em lugar de calcular $\hat{A}$ para minimizar $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i{}^2$, devemos calcular $\hat{A}$ para minimizar $\theta.y$, onde θ é a matriz que relaciona os pesos de cada erro de precisão ε_i obtido na respectiva medição y_i. Pondo

$$C = \theta^T \theta$$

, temos

$$\hat{A} = (X^T C X)^{-1} X^T C Y.$$

Alternativamente, pode-se dizer que o MQP é uma técnica de minimização do erro esperado na estimativa, medida pela matriz de covariância dos erros de estimativa P, dada por

$$P = (X R^{-1} X)^{-1}$$

onde R é a matriz de covariância dos erros de observação. Além disso, supondo $C = R^{-1}$ (suposição feita inicialmente por Gauss), resulta que

$$\hat{A} = (X^T R^{-1} X)^{-1} X^T R^{-1} Y.$$

4. CONCLUSÃO

Logo, de acordo com os resultados apresentados e com as contribuições encontradas nos trabalhos que serviram como referência para este, concluí-se que o problema de mínimos quadrados pode ser resolvido mesmo quando as observações não são igualmente precisas.

REFERÊNCIAS

GONÇALVES, Dimas José. **Aspectos matemáticos do Filtro de Kalman Discreto.** 2005. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas. 54p.

HÄRTER, Fabrício Pereira. **Redes Neurais Recorrentes Aplicadas à Assimilação de Dados em Dinâmica Não-linear.** 2007. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos. 138p.

HOFFMAN, Joe D. **Numerical Methods for Engineers and Scientists**. McGraw-Hill Book, 1992. 825p.

RIBEIRO, H. C. **Fundamentos Computacionais de Robótica Móvel**. Instituto de Tecnologia Aeronáutica, São José dos Campos, 2003. Disponível em: <http://www.comp.ita.br/~ccalixto/files/academic/master/disciplines/ct-219/ct219-tt02.pdf>. Acesso em: 11 Jun. 2012.

SORENSON, H. Least-Squares Estimation: from Gauss to Kalman. **IEEE Spectrum**, p. 63-68, Julho de 1970.