ÍNFIMOS E SUPREMOS EM ÁLGEBRAS BOOLEANAS

MATHIAS, Íngrid[1]; SILVA, Marcelo Santos[2]
BECK, Vinicius Carvalho[3].

[1] *Aluna do Curso de Licenciatura em Matemática - UFPEL*
ingrid.r.mathias@gmail.com

[2] *Licenciado em Matemática - UFPEL*
Bacharelando em Matemática - UFRGS
marcelo.math@yahoo.com.br

[3] *Licenciado em Matemática - UFPEL*
Professor do Departamento de Matemática e Estatística - UFPEL
Orientador
vonoco@gmail.com

RESUMO

A álgebra booleana, criada por George Boole no século XIX, é uma importante ferramenta de manipulação dos objetos em lógica. No século XX, o uso da álgebra booleana na eletrônica e na computação deu um novo sentido a este assunto, que hoje é indispensável para estas áreas. O objetivo deste trabalho é mostrar que a relação de ordem parcial de precedência induz de forma imediata ínfimos e supremos em álgebra booleanas.

Palavras-chave: álgebra booleana, relação de ordem parcial, lógica.

1. INTRODUÇÃO

A álgebra Booleana é uma importante ferramenta de manipulação dos objetos da lógica. As simplificações simbólicas e a generalidade dos resultados obtidos através de seu uso foram fundamentais para o desenvolvimento da matemática e de suas aplicações em outros ramos do conhecimento, principalmente no final do século XIX e início do século XX (MACFARLANE, 1916). Sua criação data de 1854, quando o matemático inglês George Boole publicou o livro “An investigation into the Laws of Thought” (BOOLE, 1854), no qual expôs os fundamentos básicos de sua álgebra, anteriormente já explorada em um trabalho precedente (BOOLE, 1848).

Em 1938, C. E. Shannon mostrou que as propriedades dos circuitos elétricos de chaveamento poderiam ser representadas por uma álgebra booleana de dois valores (PECKHAUS, 1997). Desde então, muitos avanços nas áreas de eletrônica e computação foram realizados graças ao o uso das representações simplificadas e das estratégias de raciocínio contidas na álgebra booleana.

2. MATERIAL E MÉTODOS

A seguir serão explorados alguns conceitos e resultados que servirão de base para definir a relação de ordem de precedência e enunciar alguns resultados a seu respeito, conforme descrito em Lipschutz (1967).

Consideremos um conjunto B munido de duas operações binárias chamadas *adição* e *multiplicação*, denotadas respectivamente por $+$ e $*$. A adição associa a cada par de elementos em B um novo elemento chamado *soma*, e a multiplicação associa a cada par de elementos em B um novo elemento chamado *produto*. Dizemos que o terno $(B,+,*)$ é uma *álgebra Booleana* se $(B,+,*)$ satisfaz as seguintes condições:

1) Fechamento: Para quaisquer $a,b \in B,$ a soma $a+b$ e o produto $a*b$ existem e são elementos únicos em $B.$

2) Comutatividade: a) $a+b=b+a$

b) $a*b=b*a$

3) Associatividade: a) $(a+b)+c=a+(b+c)$

b) $(a*b)*c=a*(b*c)$

4) Distributividade: a) $a+(b*c)=(a+b)*(a+c)$

b) $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$

5) Existência do elemento neutro: $\forall a \in B, \exists 0 \in B,$ tal que $a+0=a$

6) Existência do elemento identidade: $\forall a \in B, \exists i \in B,$ tal que $a*i=a$

7) Existência do complemeto de a: $\forall a \in B, \exists a' \in B,$ chamado complemento de $a,$ tal que $a+a'=i$ e $a*a'=0$

Exemplo 1:

Consideremos a álgebra booleana $(\alpha,\cup,\cap)$, onde α é um conjunto no qual os elementos são conjuntos. A precede B significa que $A \subset B$. Neste caso, dizemos que A é subconjunto de B. O elemento neutro de $(\alpha,\cup,\cap)$ é o conjunto $\varnothing$ e o elemento identidade de $(\alpha,\cup,\cap)$ é o conjunto U. Dado o conjunto A, o seu complemento A' é o conjunto ðA.

Todas as propriedades que envolvem operações entre conjuntos são consequências do fato de $(\alpha,\cup,\cap)$ ser uma álgebra booleana. Isto mostra que os conceitos estudados na álgebra booleana generalizam os conceitos da teoria dos conjuntos.

Exemplo 2:

Consideremos a álgebra booleana $(\beta,\vee,\wedge)$, onde β é um conjunto no qual os elementos são proposições lógicas. P precede Q significa que $P \Rightarrow Q$. Neste caso, dizemos que P implica em Q. O elemento neutro de $(\beta,\vee,\wedge)$ é a contradição e o elemento identidade de $(\beta,\vee,\wedge)$ é a tautologia. Dado a proposição P, o seu complemento P' é a proposição $\sim P$ (isto é, a negação de P) .

Exemplo 3:

Consideremos a álgebra booleana (γ, and, or), onde $\gamma=\{0,1\}$. Aqui, 0 precede 1. O elemento neutro de (γ, and, or) é 0 e o elemento identidade de (γ, and, or) é 1. 0 é o complemento de 1 e vice-versa. A álgebra booleana (γ, and, or) é largamente utilizada na eletrônica digital para simplificar grandes circuitos elétricos que combinam ligações em série e em paralelo. As ligações em série são consideradas como and e as ligações em paralelo são consideradas como or. O estado “desligado” é considerado 0 e o estado “ligado” é considerado 1.

Teorema 0 (Lei das equivalências Booleanas):

Seja $(B,+,*)$ uma álgebra booleana, e sejam $a,b \in B$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1) $a*b'=0$

2) $a+b=b$

3) $a'+b=i$

4) $a*b=a$

Prova:

$1) \Rightarrow 2)$:

$$a*b'=0 \Rightarrow (a+b)=(a+b)*i=(a+b)*(b+b')=(b+a)*(b+b')=$$
$$=b+(a*b')=b+0=b$$

$2) \Rightarrow 3)$:

$$a+b=b \Rightarrow a'+b=a'+(a+b)=(a'+a)+b=(a+a')+b=$$
$$i+b=i$$

$3) \Rightarrow 4)$:

$$a'+b=i \Rightarrow (a'+b)*a=i*a \Rightarrow (a'*a)+(b*a)=a \Rightarrow (a*a')+(a*b)=a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0+(a*b)=a \Rightarrow a*b=a$$

$4) \Rightarrow 1)$:

$$a*b=a \Rightarrow (a*b)*b'=a*b' \Rightarrow a*(b*b')=a*b' \Rightarrow a*0=a*b' \Rightarrow a*b'=0$$

Definição 3:

Seja $(B,+,*)$ uma álgebra booleana, e sejam $a,b \in B$. Dizemos que a *precede* b, e escrevemos $a \prec b$ se uma das propriedades do teorema 0 se mantiver.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Teorema 1:

A relação em uma álgebra booleana $(B,+,*)$, definida por $a \prec b$, é uma ordem parcial em B, isto é,

1) $a \prec a, \forall a \in B$ (reflexividade)

2) $a \prec b$ e $b \prec a$ implica em $a=b$ (anti-simetria)

3) $a \prec b$ e $b \prec c$ implica em $a \prec c$ (transitividade)

Prova:

1) Observamos que $a \prec b$ se $a+b=b$. Então em particular, temos que $a+a=a$. Isto mostra que $a \prec a$.

2) Observamos que $a \prec b$ se $a+b=b$ e $b \prec a$ se $b+a=a$. Sendo assim, $a=b+a=a+b=b$.

3) Observamos que $a \prec b$ se $a+b=b$ e $b \prec c$ se $b+c=c$. Sendo assim, $a+c=a+(b+c)=(a+b)+c=b+c=c$. Isto mostra que $a \prec c$.

Teorema 2:

Seja $(B,+,*)$ uma álgebra booleana, e sejam $a,b \in B$. Então,

1) $a+b$ é uma cota superior para o conjunto $\{a,b\}$

2) $a*b$ é uma cota inferior para o conjunto $\{a,b\}$

Prova:

1) $a+(a+b)=(a+a)+b=a+b \Rightarrow a \prec (a+b)$. Analogamente, podemos mostrar que $b+(a+b)=b+(b+a)=(b+b)+a=b+a=a+b \Rightarrow a \prec (a+b)$. Isto prova que $a+b$ é cota superior do conjunto $\{a,b\}$.

2) $(a*b)+a=a+a=a \Rightarrow (a*b) \prec a$. Analogamente, nós podemos mostrar que $(a*b)+b=a+b=b \Rightarrow (a*b) \prec b$. Isto prova que $a*b$ é cota inferior do conjunto $\{a,b\}$.

Teorema 3:

Seja $(B,+,*)$ uma álgebra booleana, e sejam $a,b \in B$. Então,

1) $a+b=\sup\{a,b\}$

2) $a*b=\inf\{a,b\}$

Prova:

1) De acordo com o teorema anterior, $a+b$ é cota superior de $\{a,b\}$. Supomos que c seja uma cota superior de $\{a,b\}$. Vamos provar que $(a+b) \prec c$. De fato, se c é cota superior de $\{a,b\}$, então $a \prec c$ e $b \prec c$, o que implica que $a+c=c$ e $b+c=c$. Sendo assim, $(a+b)+c=a+(b+c)=a+c=c$, ou seja, $(a+b) \prec c$. Logo, $a+b=\sup\{a,b\}$.

2) De acordo com o teorema anterior, $a*b$ é cota inferior de $\{a,b\}$. Supomos que d seja uma cota inferior de $\{a,b\}$. Vamos provar que $d \prec (a*b)$. De fato, se d é cota inferior de $\{a,b\}$, então $d \prec a$ e $d \prec b$, o que implica que $d*a=d$ e $d*b=d$. Sendo assim, $d*(a*b)=(d*a)*b=d*b=d$, ou seja, $d \prec (a*b)$. Logo, $a*b=\inf\{a,b\}$.

4. CONCLUSÃO

Logo, de acordo com os conceitos e resultados apresentados neste trabalho, podemos concluir que é possível definir em uma álgebra booleana uma relação de ordem parcial que induz de forma imediata ínfimos e supremos nestas estruturas algébricas.

REFERÊNCIAS

[1] BOOLE, George. **An investigation into the Laws of Thought**. Queen's College, Cork, 1854.

[2] BOOLE, George. **The Calculus of Logic**. Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Vol. III (1848).

[3] LIPSCHUTZ, Seymour. **Teoria dos conjuntos**. Ao livro técnico, Rio de Janeiro, 1967.

[4] MACFARLANE, A. . **George Boole (1815-1864)**. Lectures on Ten British Mathematicians of the Nineteenth Century, New York: Wiley and London: Chapman and Hall 1916, pp. 50–63, .

[5] PECKHAUS, Volker. **Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy (Science networks. Historical Studies, Vol. 20)** . Birkhäuser Verlag, Basel/Boston/Berlin, 1997, ISBN 0-8176-5456-9.