A RELAÇÃO ENTRE MATRIZES HERMITIANAS, UNITÁRIAS E NORMAIS

LEAL, Willian Sodre[1]; BECK, Vinicius Carvalho[2];

[1] *Aluno do Curso de Engenharia da Computação - UFPEL*
Autor
williansodre2008@hotmail.com

[2] *Licenciado em Matemática - UFPEL*
Professor do Departamento de Matemática e Estatística - UFPEL
Orientador
vonoco@gmail.com

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é construir uma revisão bibliográfica detalhada sobre matrizes hermitianas, unitárias e normais, destacando principalmente a relação entre estes três tipos de matrizes e suas propriedades algébricas. Deduz-se, diretamente da definição, que tanto as matrizes hermitianas quanto as unitárias são normais. Mas qual a relação entre as hermitianas e unitárias? Formam conjuntos disjuntos? São conjuntos iguais? Um conjunto está contido no outro? Como caracterizar estes tipos de matrizes intuitivamente e/ou analiticamente? Estas e outras questões são discutidas e respondidas neste trabalho.

Palavras-chave: matrizes hermitianas, matrizes unitárias, matrizes normais.

1. INTRODUÇÃO

Desde que Halmos (1958) lançou as bases da álgebra linear moderna, muitos resultados interessantes floresceram desta teoria. As matrizes complexas desempenham um papel essencial em áreas tais como a física e a engenharia elétrica (LEON, 2010), e por isto existem muitos estudos sobre operadores lineares em espaços vetoriais complexos, o que gera uma versão complexa da álgebra linear, tal como é descrita por Hoffman (1971). A seguir, serão apresentadas algumas definições e resultados básicos sobre matrizes complexas.

Definição 1: Dizemos que uma matriz A é uma *matriz complexa*, se A pode ser escrita como $A = B + iC$, onde i é a unidade imaginária, e B e C são matrizes reais.

Definição 2: Seja $A = B + iC$ uma matriz complexa. Sendo assim, dizemos que a matriz $\bar{A} = B - iC$ é a *matriz conjugada* de A.

Definição 3: Seja A uma matriz complexa e $A^H = (\bar{A})^t$. Dizemos que A é *hermitiana*, se $A = A^H$.

Cabe aqui tecer alguns comentários sobre propriedades interessantes deste tipo de matriz complexa. Em primeiro lugar, elas satisfazem a importante propriedade de possuir apenas autovalores reais. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são sempre ortogonais (LEON, 2010). Da definição, pode-se também inferir que a diagonal de uma matriz hermitiana é formada apenas por números reais. Finalmente, destaca-se a importante analogia entre matrizes simétricas reais e hermitianas complexas, com propriedades análogas (LIMA, 1998).

Definição 4: Dizemos que uma matriz complexa A é *unitária*, se $AA^H = A^H A = I$.

A importância das matrizes unitárias reside no fato de que se os autovalores de uma matriz hermitiana, digamos A, são todos distintos, então existe uma matriz unitária que diagonaliza A. Uma forma alternativa de definir matrizes unitárias é caracterizando-as como matrizes nas quais os vetores coluna formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{C}^n$ (LEON, 2010).

Definição 5: Dizemos que uma matriz complexa A é *normal*, se $AA^H = A^H A$.

A importância das matrizes normais para a teoria dos espaços vetoriais complexos recai no fato de que, considerando um operador linear complexo $T: E \rightarrow E$, existe em E uma base ortonormal formada por autovetores de T se, e somente se, T é um operador normal (LIMA, 1998).

2. MATERIAL E MÉTODOS

A partir das definições acima descritas, foram deduzidas as relações entre matrizes hermitianas, unitárias e normais. Estas relações foram deduzidas através de demonstrações diretas e contra-exemplos.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Proposição 1: Toda matriz hermitiana é normal.

Demonstração: De fato, se $A = A^H$, da igualdade redundante $AA = AA$, podemos inferir (introduzindo convenientemente A^H) que $AA^H = A^H A$.

Assim, temos o diagrama 1:

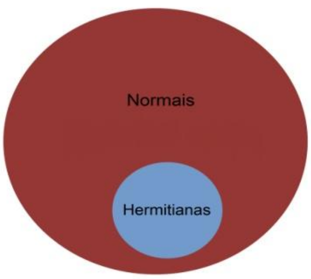

Diagrama 1

Proposição 2: Toda matriz unitária é normal.

Demonstração: Este fato é evidente pois, por definição, neste caso, tem-se $AA^H = A^H A = I$, e já temos explicitamente a igualdade $AA^H = A^H A$.

Neste caso, temos o diagrama 2:

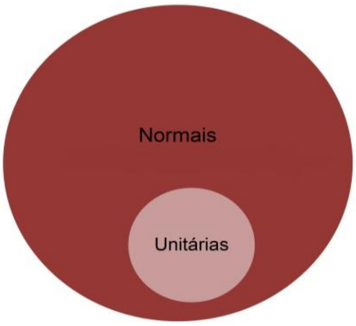

Diagrama 2

Os exemplos que seguem mostram que os conjuntos de matrizes citadas acima podem ser representados de acordo com o diagrama 3:

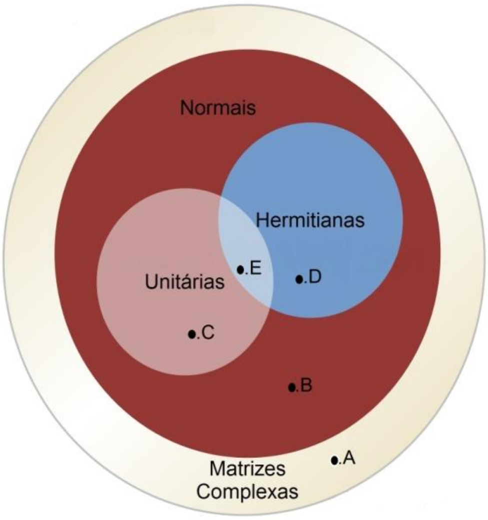

Diagrama 3

Exemplo 1: $E = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow EE^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E^H E$. Este é um exemplo de matriz hermitiana, unitária e normal. Repare que a diagonal é real e que os vetores coluna são ortonormais.

Exemplo 2: $D = \begin{bmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow DD^H = \begin{bmatrix} 11 & 9-3i \\ 9+3i & 14 \end{bmatrix} = D^H D$. Exemplo de matriz normal hermitiana, porém não-unitária. Note que a diagonal é real, mas DD^H não é a identidade.

Exemplo 3: $C = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow CC^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C^H C$. Como C possui um número complexo na diagonal, logo, não é hermitiana. Como CC^H é a identidade e $C^H C$ também é, então C unitária, e consequentemente, normal.

Exemplo 4: $B = \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \Rightarrow BB^H = \begin{bmatrix} 28 & -8+8i \\ -8-8i & 12 \end{bmatrix} = B^H B$. A matriz B tem números complexos na diagonal, e os vetores colunas não formam um conjunto ortonormal, e portanto B não é hermitiana e não é unitária. No entanto, $BB^H = B^H B$, ou seja, esta matriz é normal.

Exemplo 5: $A = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} AA^H = \begin{bmatrix} 2 & 5i \\ -5i & 13 \end{bmatrix} \\ A^H A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow AA^H \neq A^H A$. Como se vê, A não é normal, portanto, também não é hermitiana, nem unitária.

4. CONCLUSÃO

De acordo com as proposições e contra-exemplos apresentados, concluí-se que se uma matriz complexa é hermitiana ou é unitária, então esta matriz é normal. Além disso, a intersecção entre o conjunto das matrizes hermitianas e o conjunto das matrizes unitárias é não-vazia e nenhum destes dois conjuntos está contido no outro. Existem matrizes normais não-hermitianas e não-unitárias, e também matrizes complexas não-normais.

REFERÊNCIAS BILIOGRÁFICAS

HALMOS, Paul. **Finite Dimensional Vector Spaces**. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1958.

HOFFMAN, K; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Editora Polígono, São Paulo, 1971.

LEON, Steven J. **Linear Algebra With Applications**. 8th edition. Pearson Education Inc., Dartmounth, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 3º edição. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1998.