A RELAÇÃO ENTRE ESPAÇOS MÉTRICOS E ESPAÇOS TOPOLÓGICOS

SILVA, Marcelo Santos[1]; BECK, Vinicius Carvalho[2];

[1] Licenciado em Matemática - UFPEL
Bacharelando em Matemática - UFRGS
Autor
marcelo.math@yahoo.com.br

[2] Licenciado em Matemática - UFPEL
Professor do Departamento de Matemática e Estatística - UFPEL
Orientador
vonoco@gmail.com

RESUMO

O objetivo deste trabalho é destacar a relação que existe entre os espaços métricos e os espaços topológicos. O principal resultado acerca desta relação é apresentado na seção 3 na forma de um teorema seguido de sua respectiva demonstração.

Palavras-chave: espaços métricos, espaços topológicos, métrica.

1. INTRODUÇÃO

A seguir, serão enunciados alguns conceitos relativos a espaços métricos e topológicos que permitem demonstrar a relação indicada neste trabalho. Ressalta-se que esta relação já é bastante conhecida e explorada na literatura. Porém, tal relação muitas vezes não é apresentada em detalhes, daí a importância do presente trabalho.

Definição 1 (topologia): Seja X um conjunto não-vazio e $\wp(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X. Uma *topologia* sobre X é uma coleção $\tau \subset \wp(X)$ que cumpre as seguintes propriedades:

1) $\emptyset, X \in \tau$.
2) $A_i \in \tau \Longrightarrow \bigcup_i A_i \in \tau$.
3) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

Observação: Na propriedade 2), a união pode ser tanto finita, quanto infinita.

Definição 2 (espaço topológico): Dada uma topologia τ sobre um conjunto X, o par $< X, \tau >$ é denominado *espaço topológico*.

Definição 3 (conjuntos topologicamente abertos): Os elementos de uma topologia τ são chamados de *conjuntos topologicamente abertos de* τ, ou simplesmente de *abertos de* τ.

Definição 4 (métrica): Seja M um conjunto não-vazio e $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que d é uma *métrica sobre* M, se as seguintes condições são satisfeitas:

1) $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in M$.
2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, para $x, y \in M$.
3) $d(x,y) = d(y,x), \forall x, y \in M$.
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall x, y \in M$.

Definição 5 (espaço métrico): Seja M um conjunto não-vazio. Dizemos que o par $< M, d >$ é um *espaço métrico*, se é possível definir sobre M uma métrica d.

Definição 6 (conjuntos metricamente abertos): Um conjunto A é *metricamente aberto*, se $\forall a \in A, \exists \varepsilon > 0$: $[x \in M$ e $d(x,a) < \varepsilon] \Longrightarrow x \in A$).

2. MATERIAL E MÉTODOS

A metodologia utilizada para a realização deste trabalho foi a pesquisa em livros e artigos dedicados à topologia e aos espaços métricos, com destaque para [2] LIMA e [3] LIMA, seguida de discussões e adequação de linguagem para construir uma demonstração do teorema apresentado na seção 3 deste artigo.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Teorema: Seja $< M, d >$ um espaço métrico. Seja T_M a coleção dos subconjuntos metricamente abertos de M. Então $< M, T_M >$ é um espaço topológico.

Demonstração:

Seja $< M, d >$ um espaço métrico, onde M é um conjunto não-vazio e d a métrica definida sobre M. Consideremos a coleção T_M dos subconjuntos metricamente abertos de M. Vamos caracterizar os conjuntos topologicamente abertos como sendo os metricamente abertos, chamando-os daqui para frente simplesmente de *abertos* e mostrar que o par $< M, T_M >$ é um espaço topológico.

$\emptyset$ é aberto por vacuidade. Pela definição de conjunto metricamente aberto, temos que $\forall a \in M, \exists \varepsilon = 1$ (por exemplo) tal que $[x \in M$ e $d(x,a) < \varepsilon] \Longrightarrow x \in M$. Daí segue que $\emptyset$ e M são abertos. (1)

Consideremos um elemento a qualquer pertencente a uma união (finita ou infinita) de abertos. Como a pertence à união, então existe um conjunto A_i tal que $a \in A_i$ e $\forall b \in A_i, \exists \varepsilon_i > 0$: $[x \in M$ e $d(x,b) < \varepsilon_i] \Longrightarrow x \in A_i$. Em particular, para $b = a, \exists \varepsilon_{i_a} > 0$: $\left[x \in M \text{ e } d(x,a) < \varepsilon_{i_a} \right] \Longrightarrow x \in A_i$. Conseqüentemente, x pertence à união. Sendo U a união (finita ou infinita) de abertos, então isto significa que $\forall a \in U, \exists \varepsilon_{i_a}$ tal que $[x \in M$ e $d(x,a) < \varepsilon_{i_a}] \Longrightarrow x \in U$. Assim, a união (finita ou infinita) de abertos de um espaço métrico M é um aberto de M. (2)

Consideremos agora um elemento a qualquer pertencente a uma intersecção finita I de abertos. Como $a \in I$, então $a \in A_1, a \in A_2, \ldots,$ e $a \in A_n$ (assumindo que I seja uma intersecção de n subconjuntos). Isto significa que existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ tais que $[x \in M$ e $d(x,a) < \varepsilon_1] \Longrightarrow x \in A_1$, $[x \in M$ e $d(x,a) < \varepsilon_2] \Longrightarrow x \in A_2$, ... , e $[x \in M$ e $d(x,a) < \varepsilon_n] \Longrightarrow x \in A_n$. Escolhendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$, temos $[x \in M$ e $d(x,a) < \varepsilon] \Longrightarrow x \in I$. Portanto, a intersecção finita de subconjuntos abertos de M é um aberto de M. (3)

Logo, de (1), (2) e (3) concluímos que o par $< M, T_M >$ constitui um espaço topológico.

4. CONCLUSÃO

O teorema acima mostra que é possível obter um espaço topológico a partir da coleção dos subconjuntos metricamente abertos de um espaço métrico, ou seja, dado um espaço métrico, podemos induzir uma topologia a partir dos conjuntos abertos.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise vol.2**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2006.

[2] LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral**. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1976.

[3] LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Rio de Janeiro, 1977.

[4] SEMMES, Stephen. **A begginer's guide to analysis in metric spaces**. Rice University, Houston-Texas, arXiv: math/0408024v1 [math.CA], 2 Aug 2004.

[5] SEMMES, Stephen. **A few aspects of analysis on metric spaces**. Rice University, Houston-Texas, arXiv: math/0211123v1 [math.CA], 6 Nov 2002.