MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS PRESA-PREDADOR

DE MARCO, Edenara[1]; CEZIMBRA, Renata[1;] LAPA, Mariel[1]; SINHOR, Vanderleia[1]; BUSKE, Daniela[2]

[1] Universidade Federal de Pelotas – UFPel, Curso de Engenharia Sanitária e Ambiental.
edenarademarco@gmail.com; renatacezimbra@hotmail.com; mariellapa@hotmail.com; vandersinhor@yahoo.com.br
[2] Universidade Federal de Pelotas – UFPel, Instituto de Física e Matemática.
daniela.buske@ufpel.edu.br

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentaremos o modelo Lotka-Volterra, talvez o mais antigo dos modelos presa-predador. Apesar de sua simplicidade, este apresenta características interessantes e pode ser utilizado para introduzir as idéias básicas da modelagem de ecossistemas.

O biofísico Alfred James Lotka (1880-1949) e o matemático Vito Volterra (1860-1940) de forma independente propuseram um mesmo modelo, então denominado Lotka-Volterra, para explicar as interações entre populações de presas e predadores. As equações de Lotka-Volterra retratam um sistema presa-predador de duas espécies onde uma espécie, o predador, determina a abundância da outra, a presa. Nem sempre a reprodução das espécies ocorre de maneira sincronizada, ou seja, pode ocorrer que as espécies se reproduzam em intervalos diferentes de tempo. A interação entre raposas e coelhos, joaninhas e pulgões, tubarões e peixes, linces e lebres são bons exemplos para um sistema presa-predador. Devido à interação entre as espécies podem ocorrer três situações: Coexistência de presas e predadores; presas são extintas e em consequência predadores também; apenas predadores são extintos (DANTAS, 2005).

Salientamos que um modelo que contempla a interação de apenas duas espécies não é capaz de descrever completamente as relações que existem em um ecossistema (DANTAS, 2005). No entanto o entendimento de modelos mais simples é o passo inicial para a compreensão de outros mais complicados.

2 METODOLOGIA

No presente trabalho, buscamos relacionar as informações físicas e equações matemáticas estudadas na disciplina de equações diferenciais ordinárias com o objetivo de modelar e resolver problemas que envolvam sistemas do tipo presa-predador. Utilizando estas informações focamos inicialmente no desenvolvimento da modelagem do problema para diversas situações.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 O modelo Lotka-Volterra

Denotam-se por $u = u(t)$ e $v = v(t)$ as populações, respectivamente, da presa e do predador em um instante de tempo t. Para modelar a interação entre as duas espécies são assumidas as seguintes hipóteses:

1. Na ausência do predador, a população da presa aumenta a uma taxa proporcional à população atual. Dessa forma, se $v=0, du/dt=au, a>0$, onde a é a taxa de crescimento da população de presas (modelo de Malthus).
2. Na ausência de presas, a população do predador se extingue a uma taxa proporcional à sua população atual. Assim, se $u=0, dv/dt=-\mu v, \mu>0$, onde μ é a taxa de morte dos predadores.
3. O número de encontros entre presas e predadores é diretamente proporcional ao produto das duas populações. Cada um desses encontros tende a inibir o crescimento da população de presas e a aumentar o da população de predadores.

Assim, a população de presas sofre uma redução de $-\alpha uv$ e a população de predadores é aumentada de γuv, onde α e γ são constantes positivas e correspondem, respectivamente, às taxas de predação e de conversão da caça em novos predadores. Em consequência dessas hipóteses, tem-se o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} du/dt = au - \alpha uv = u(a-\alpha v) \\ dv/dt = \gamma uv - \mu v = v(\gamma u - \mu) \end{cases}$$

Note que as equações Lotka-Volterra formam um sistema não-linear.

Construído o modelo, a próxima etapa é extrair informações dele. Uma maneira óbvia de fazê-lo seria resolver as equações diferenciais encontrando $u(t)$ e $v(t)$, através de uma solução numérica, por exemplo. Entretanto, é possível conseguir informação sobre o comportamento das soluções de forma analítica sem necessariamente resolver as equações, o que constitui uma boa abordagem inicial para o problema, pois não existe uma abordagem única e sistematizada para resolver equações não-lineares (diferentemente de equações lineares).

3.2 Modelo presa-predador

Suponha que duas espécies diferentes de animais interajam no mesmo ambiente ou ecossistema e , além disso, suponha que a primeira espécie alimente-se somente de vegetais e a segunda alimente-se somente da primeira espécie. Em outras palavras, uma espécie é um predador e a outra, uma presa. Por exemplo, lobos caçam renas, as quais se alimentam de grama e tubarões devoram peixes pequenos. A título de discussão, vamos imaginar que os predadores sejam as raposas e as presas sejam os coelhos.

Vamos denotar por $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, a população de raposas e coelhos em determinado instante t. Se não houvessem coelhos, então poder-se-ia esperar que as raposas, por falta de suprimentos alimentícios adequados, declinassem em número de acordo com

$$dx/dt = -ax, a>0 \tag{1}$$

Contudo, quando os coelhos estão no meio ambiente, parece razoável que o número de encontros ou interaçãos entre as duas espécies por unidade de tempo seja conjuntamente proporcinal às populações x e y, isto é, proporcionais ao produto xy. Assim, quando os coelhos estiverem presentes, haverá alimento e, portanto, as raposas serão acrescentadas ao sistema a uma taxa $bxy, b>0$.

Adicionando-se essa última taxa a (1), obtemos um modelo para a população de raposas:

$$dx/dt = -ax + bxy \tag{2}$$

Por outro lado, se não houver raposas, os coelhos, supondo adicionalmente que seu suprimento de alimentos seja ilimitado, cresceriam a uma taxa proporcional ao número de coelhos presentes no instante t:

$$dy/dt = dy, d > 0 \tag{3}$$

Mas quando houver raposas, (3) será um modelo para a população de coelhos subtraído de $cxy, c > 0$, isto é, subtraído da taxa segundo a qual os coelhos são comidos quando se deparam com as raposas:

$$dy/dt = dy - cxy \tag{4}$$

As equações (2) e (4) formam um sistema de equações diferenciais não lineares

$$\begin{cases} dx/dt = -ax + bxy = x(-a + by) \\ dy/dt = dy - cxy = y(d - cx) \end{cases} \tag{5}$$

onde *a*, *b*, *c* e *d* são constantes positivas. Esse famoso sistema de equações é c onhecido como modelo presa-predador de Lotka-Volterra.

Exceto pelas soluções constante, $x(t) = 0, y(t) = 0$ e $x(t) = d/c, y(t) = a/b$, o sistema não linear (5) não pode ser resolvido em termos de funções elementares. Porém, podemos analisar esses sistemas quantitativa e qualitativamente.

Exemplo:

Suponha que o modelo presa-predador seja representado pelo sistema:

$$\begin{cases} dx/dt = -0.,16x + 0,08xy \\ dy/dt = 4,5y - 0,9xy \end{cases}$$

Uma vez que estamos tratando de populações, temos $x(t) \geq 0, y(t) \geq 0$. A figura 1, obtida com a ajuda de um solucionador numérico, mostra curvas de populações típicas de predadores (raposas) e presas (coelhos), para esse modelo sobrepostas no mesmo conjunto de eixos coordenados. A condição inicial usada foi $x(0) = 4, y(0) = 4$.

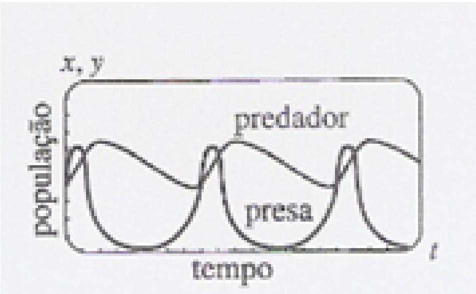

Fig. 1 – Populações de predadores e
presas aparentemente são periódicas (ZILL, 2003).

Observe que o modelo parece prever que ambas as populações, $x(t)$ e $y(t)$ são periódicas. Isso faz sentido, intuitivamente, pois a medida que o número de presas decresce, a população de predadores acaba decrescendo em decorrência da diminuição de alimento; mas subordinado ao decréscimo no número de predadores há um acréscimo no número de presas; esse último, por sua vez, dá origem a um acréscimo no número de predadores, os quais acabam por provocar outro decréscimo no número de presas.

3.3 Modelos com competição

Suponha agora duas espécies diferentes de animais ocupando o mesmo ecossistema, não como predador e presa, mas em vez disso, competindo uma com a outra pela mesma fonte de recursos (como alimentos, espaço vital) no sistema. Na ausência de uma das espécies, vamos supor qua a taxa segundo a qual cada população cresce é dada por

$$dx/dt = ax \quad \text{e} \quad dy/dt = cy \tag{6}$$

respectivamente.

Uma vez que as duas espécies competem entre sim, podemos supor também que cada uma dessas taxas diminua simplesmente pela influência ou existência de outra população. Assim, o modelo das duas populações é dado pelo sistema linear

$$\begin{cases} dx/dt = ax - by \\ dy/dt = cy - dx \end{cases} \tag{7}$$

onde *a*, *b*, *c* e *d* são constantes positivas.

Entretanto, podemos supor, como fizemos em (2), que cada taxa de crescimento em (6) deva ser reduzida por uma taxa proporcional ao número de interações das duas espécies, ou seja:

$$\begin{cases} dx/dt = ax - bxy \\ dy/dt = cy - dxy \end{cases} \tag{8}$$

Uma análise mostra que esse sistema não linear é similar ao modelo presa-predador de Lotka-Volterra obtido anteriormente. Finalmente, pode ser mais realista substituir as taxas em (6), as quais indicam que a população de cada espécie em isolamento cresce exponencialmente, por taxas que indiquem que cada população cresce logisticamente (isto é, a população é limitada durante um longo período):

$$dx/dt = a_1 x - b_1 x^2 \quad \text{e} \quad dy/dt = a_2 y - b_2 y^2 \tag{9}$$

Quando dessas novas taxas forem subtraídas taxas proporcionais ao número de interações, obteremos um ou outro modelo não linear.

4 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi alcançado uma vez que apresentamos a modelagem matemática para um modelo do tipo Lotka-Volterra. O próximo passo será obter a resolução matemática dos problemas descritos.

5 REFERÊNCIAS

ZILL, D.G., **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**, Cengage Learning, 2003.

DANTAS, M.P., Seleção natural espontânea em sistemas presa-predador com difusão, Monografia de graduação, Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais, 2005.