RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM PELO MÉTODO DE TAYLOR

SOUZA, Thiago Rosa de[1]; IACKS, Jonathan Aires[1]; VARGAS JR., Vanderlei R. de[2]; SIMCH, Márcia Rosales Ribeiro[3]

[1]Universidade Federal de Pelotas/Curso de Engenharia Civil; [2]Universidade Federal de Pelotas/Faculdade de Meteorologia; [3]Universidade Federal de Pelotas/Centro das Engenharias.
rosa.thiago@hotmail.com

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é resolver, pelo método da série de Taylor, e utilizando um sistema algébrico computacional, uma equação diferencial de segunda ordem, decorrente do estudo do deslocamento espacial de uma viga engastada numa extremidade e livre na outra; também são comparados os resultados numéricos obtidos, com a solução analítica da equação diferencial.

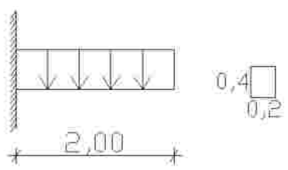
2 METODOLOGIA (MATERIAL E MÉTODOS)

Consideramos a equação

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M\ ,$$

onde E é o módulo de elasticidade do material da viga homogênea, quanto ao material, e uniforme, I é o momento de Inércia da seção transversal e M o momento fletor na seção transversal, associados à viga engastada. A solução $y(x)$ dessa equação nos dá a deformação (deflexão) da viga em um ponto qualquer.

Para fins de estudo de um caso prático, consideramos uma viga engastada numa extremidade e com a outra em balanço, sujeita a uma carga distribuída de 1500kgf por metro, um vão de 2 metros, uma seção transversal de 20 cm de largura e 40 cm de altura e um módulo de elasticidade 2.10^9kgf/m^2.



O seguinte procedimento mostra a resolução analítica da equação diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-MF(x)}{EI}$$

$$EI\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=-3000x+750x^2+3000$$

$$EI\cdot\frac{dy}{dx}=-1500x^2+250x^3+300x+c_1$$

$$EI\cdot y=-500x^3+250\frac{x^4}{4}+1500x^2+c_1x+c_2$$

As condições iniciais são:

a) Em x=0, y=0 o que resulta em c_2=0.

b) Em x = 0, $\frac{dy}{dx} = 0$, obtendo-se c_1 = 0.

Assim, a deflexão máxima (flecha) é dada por:

$$y_{máx} = \frac{-500x^3 + \frac{250}{4}x^4 + 1500x^2}{EI}$$

quando x = 2m.

Um procedimento alternativo de resolução da equação diferencial é utilizando o método da série de Taylor para EDO's de segunda ordem.

Consideramos o problema de valor inicial associado a equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Fazendo $v(x) = y'(x)$, temos $v' = y''(x)$ e a equação diferencial pode ser reescrita na forma do sistema

$$\begin{cases} y' = v(x) \\ v' = f \end{cases},$$

com valores iniciais são $y(0) = 0$ e $v(0) = 0$. Na notação vetorial, chamando $U = (y, v)^T$, a equação pode ser reescrita como

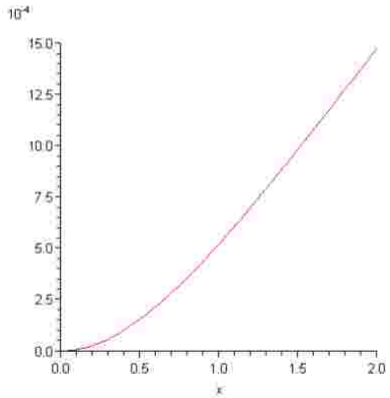
$$\begin{cases} U' = (v, f)^T \\ U(0) = (0,0)^T \end{cases}.$$

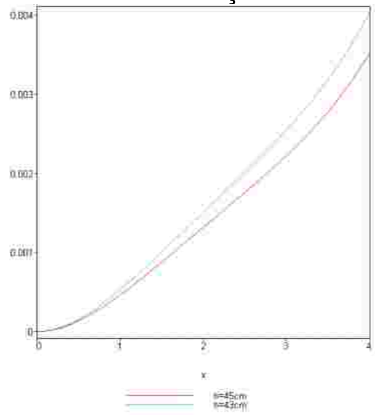
Efetuando as derivações, usando a regra da cadeia, e observando que $v' = \frac{1}{EI}(-3000x + 750x^2 + 3000)$, obteremos o seguinte esquema recursivo que aproxima $\begin{pmatrix} y_{i+1} \\ y'_{i+1} \end{pmatrix}$ teremos:

$$U_{i+1} = \begin{pmatrix} y_{i+1} \\ y'_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i \\ y'_i \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} y'_i \\ v' \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} v' \\ v'' \end{pmatrix} + \frac{h^3}{3!}\begin{pmatrix} v'' \\ v''' \end{pmatrix} + \frac{h^4}{4!}(0).$$

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Utilizando o software simbólico MAPLE, exploramos o resultado obtido. Podemos ver nas figuras a seguir, o comportamento da deformação da viga e o aumento da rigidez obtido quando aumentamos a altura da seção transversal:





A solução exata foi comparada com a solução aproximada produzida pelo método de Taylor, cujo código em MAPLE é mostrado a seguir:

```
> a:=0;b:=4;h:=1/10;N:=(b-a)/h;
```

$$a := 0$$

$$b := 4$$

$$h := \frac{1}{10}$$

$$N := 40$$

```
> for i from 1 to N do
 x[i]:=a+i*h od:
> y[0]:=0;
yd[0]:=0;
EI:=(2*10^9*0.15*0.43^3)/12;
```

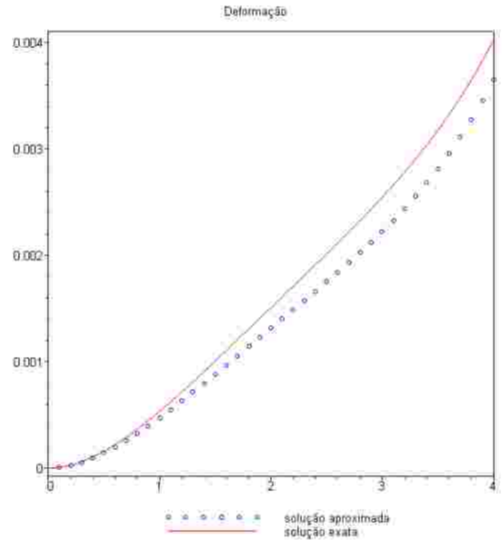
$$y_0 := 0$$

$$yd_0 := 0$$

$$EI := 0.1987675000\ 10^7$$

```
> for i from 1 to N do
y[i]:=y[i-1]+h*yd[i-1]+1/EI*((h^2)/2*(-
3000*x[i]+750*(x[i])^2+3000)+(h^3)/6*(-
3000+1500*x[i])+(h^4)/24*(1500));
yd[i]:=yd[i-1]+1/EI*(h*(-
3000*x[i]+750*(x[i])^2+3000)+(h^2)/2*(-
3000+1500*x[i])+(h^3)/6*(1500)+(h^4)/24*(0));
od:
>A:=plot([seq([x[i],y[i]],i=0..N)],style=point,symbol=circle,co
lor=blue,title=`Deformação`,legend=["solução aproximada"]):
B:=plot(3773252669/1200000000000000*x^4-
125775089/500000000000*x^3+377325267/500000000000*x^2,x=0..4,l
egend=["solução exata"]):
```

```
display({A,B});
```




```
> R := 0;
for i from 1 to N do
   R:= R+(y[i]-
3773252669/1200000000000000*x[i]^4+125775089/500000000000*x[i]^
3-377325267/500000000000*x[i]^2)^2;
od:R;
```

$$R := 0$$

$$0.2224027116\ 10^{-5}$$

4 CONCLUSÃO

Como podemos observar, quanto maior for a altura da seção transversal da viga, menor a deformação, resultado que está de acordo com casos reais. Além disso, de acordo com os resultados obtidos observa-se que a deflexão máxima é aproximadamente $4mm$, acontecendo no extremo livre da viga que corresponde ao valor máximo da função $y(x)$ no intervalo [0,4].

A solução encontrada pelo método de Taylor aproxima numericamente uma função polinomial de grau 4. Então como $D^5y(x)=0$, as aproximações que usam os seis primeiros termos da série de Taylor são exatas.

Devido à natureza numérica dos resultados, eles apresentam diferenças em relação à solução exata, que podem ser estimados por diversos critérios, entre eles, o número de Rayleigh, que consiste na soma dos quadrados das diferenças entre o valor real e o valor aproximado da deflexão.

5 REFERÊNCIAS

CUNHA, Cristina. **Métodos Numéricos para as Engenharias e Ciências Aplicadas**. São Paulo: Editora da UNICAMP, 1993.

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.