

## MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÕES EXPERIMENTAIS NA ROBÓTICA

**LIMA, Vitor G<sup>1</sup>; BOTTEGA, Valdecir<sup>2</sup>; MOLTER, Alexandre<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal de Pelotas, Ciência da Computação; <sup>2</sup>Universidade Federal de Pelotas, Departamento de Matemática e Estatística, professor Colaborador; <sup>3</sup>Universidade Federal de Pelotas, Departamento de Matemática e Estatística, professor Orientador. vgdlima@inf.ufpel.edu.br

### 1 INTRODUÇÃO

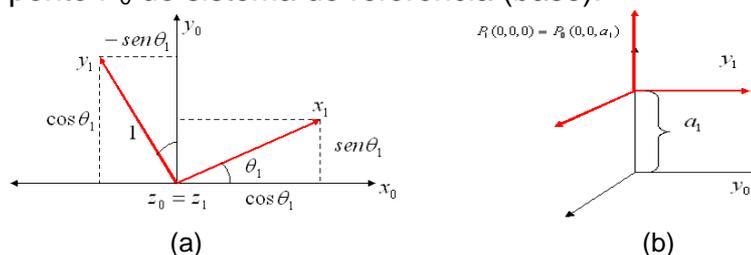
Neste trabalho é apresentada a descrição da posição do elemento terminal de um robô, em função das variáveis de junta, com respeito a um sistema de coordenadas de referência. O modelo utiliza conceitos de álgebra linear envolvendo matrizes e transformações, conceitos de trigonometria e operações sobre matrizes também estão inseridos nesta aplicação. São apresentadas equações que servem para simular o movimento de um robô, envolvendo cinemática direta e inversa, usando um sistema algébrico. O robô em questão é composto por duas articulações, onde o intuito final é o estudo das vibrações ocorridas em um braço articulado e flexível. Testes experimentais serão realizados num protótipo com um elo rígido e um elo flexível.

### 2 METODOLOGIA

Um manipulador robótico (robô) é formado por braços (elementos) e juntas (articulações). O problema fundamental da robótica consiste em programar um robô com o objetivo de executar tarefas. Para realizar o controle de um robô é necessário o seu estudo mecânico, que se divide em dinâmica, estática e cinemática. O problema central da cinemática é como definir a posição do elemento terminal do robô (Molter, 2008), por cinemática direta ou cinemática inversa.

Para solucionar os problemas de cinemática direta e inversa, da parte rígida dos elos, é necessário saber computar as relações matemáticas entre as posições de cada junta (Lay, 1999). Para isso, inicialmente adota-se um sistema de coordenadas por braço. Após Utilizam-se os conceitos de álgebra linear, no que se refere a transformações lineares.

A junta na origem é representada pelo sistema  $O_0$ , onde ocorrem rotações, referente ao movimento da junta 1, em torno do eixo  $z_0$ , como mostrado na Figura 1a. As novas coordenadas são as projeções do versor de posição em cada um dos eixos coordenados do sistema de referência. Essa rotação é transmitida para o sistema de referência  $O_1$  na junta 2 através de uma translação sobre o eixo  $z_0$ , como mostrado na Figura 1b. A origem  $P_1$  do sistema transladado situado na junta 2, é equivalente ao ponto  $P_0$  do sistema de referência (base).



**Fig. 1 - (a) Rotação da base; (b) Translação da base para a junta 2**

A matriz de rotação em torno de  $z_0$  é dada por

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen } \theta_1 & 0 \\ \text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1] \quad (1)$$

onde os vetores  $x_1$ ,  $y_1$  e  $z_1$  representam as coordenadas dos versores do sistema  $O_1$  com relação ao sistema  $O_0$  da base.

A translação de  $P_0$  para  $P_1$  é expressa também na forma matricial

$$P_0 = P_1 + d_0 \quad \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & d_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$d_0 = [0, 0, a_1]$$

onde  $a_1$  é a distância entre a junta 1 e 2 e  $d_0$  é o vetor de translação.

A matriz de translação sobre  $z_0$  é dada por

$$TR_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

No caso de torção, esta também é dada por matrizes. A Figura 2 mostra a torção em  $x_0$  para que as rotações da junta 2 ocorram sobre o eixo  $z_1$ .

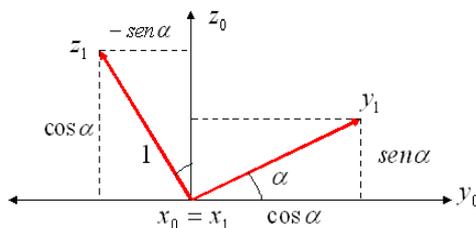


Fig. 2 - Torção na junta 1.

A matriz de rotação em torno de  $z_0$  é dada por

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1] \quad (4)$$

A transformação total para a junta 1 é obtida multiplicando-se da esquerda para direita, seguindo a ordem da seqüência de rotações apresentada acima

$$A_0^1 = \tilde{R}_z Tr_z \tilde{R}_x \quad (5)$$

na forma matricial,

$$\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen } \theta_1 & 0 & 0 \\ \text{sen } \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & \text{sen } \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para a junta 2, ocorre primeiro uma rotação em torno do eixo  $z_1$  representando a rotação da junta 2 e, em seguida, uma translação sobre o eixo  $x_1$  representando o comprimento do braço 2 do robô, resultando em

$$\mathbf{A}_1^2 = \mathbf{R}_z \mathbf{Tr}_x \quad (7)$$

ou, na forma matricial,

$$\mathbf{A}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\text{sen } \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \text{sen } \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \text{sen } \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Para a junta 3, ocorre primeiro uma rotação em torno do eixo  $z_2$  representando a rotação da junta 3 e, em seguida, uma translação sobre o eixo  $x_2$  representando o comprimento do elo 3 do robô, resultando em

$$\mathbf{A}_2^3 = \mathbf{R}_z \mathbf{Tr}_x \quad (9)$$

Ou, na forma matricial,

$$\mathbf{A}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\text{sen } \theta_3 & 0 & a_3 \cos \theta_3 \\ \text{sen } \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & a_3 \text{sen } \theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Multiplicando as transformação sucessivas, obtemos a transformação total do sistema da base até o elemento terminal, dada por

$$\mathbf{T}_0^3 = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^3 \quad (11)$$

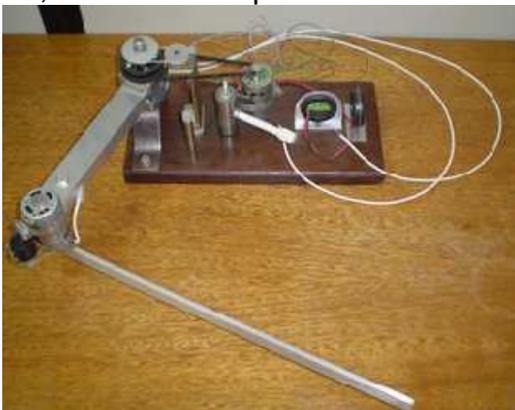
Então, um ponto  $P_3$  na extremidade do robô que esta na origem do sistema  $O_3$  é representado por  $P_0$  no sistema de coordenadas de referência  $O_0$ , da base, através da relação

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{T}_0^3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mathbf{P}_3 \quad (12)$$

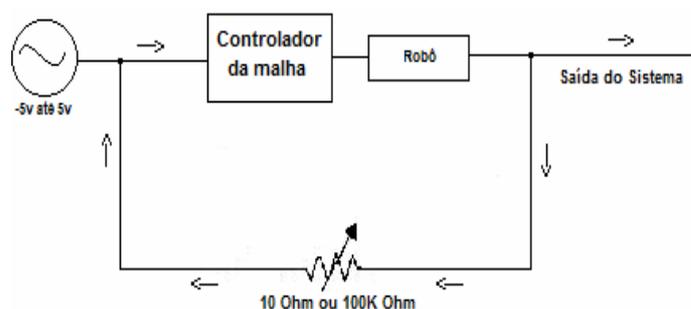
### 3 MODELAGEM E EXPERIMENTOS EM ROBÔ COM UM ELO FLEXÍVEL E UM RÍGIDO E PERSPECTIVAS DE RESULTADOS

Resultados teóricos deste modelo forem publicados em revistas (Bottega et al., 2009; Molter et al., 2010). Porém ainda não se obteve resultados experimentais para esta proposta. Em vista disto, experimentos num protótipo estão sendo desenvolvidos, com perspectivas de resultados em curto espaço de tempo.

As simulações experimentais são realizadas no protótipo, mostrado na Figura 3a, e com um esquema de controle mostrado na Figura 3b.



Fonte: Autores  
(a)



Fonte: Autores  
(b)

Fig. 3 - (a) protótipo experimental; (b) diagrama de blocos do esquema de controle.

No projeto há dois motores que operam em 12 volts e amperagem máxima de 5.5 Amperes, dois resistores variáveis (potenciômetros), sendo um de 10 Ohm e outro de 100k Ohm. O controle é feito através de malha fechada onde há um retorno do sistema, através dos potenciômetros acoplados com a rotação dos motores definindo quão distante está do local desejado, sendo que o controle ocorre com variação de velocidade de rotação dos motores. Esse tipo de controle é muito desejável por ter uma referência para a posição do elemento terminal do robô, assim atuando na dinâmica de acordo com as mudanças na malha. No projeto utilizamos os motores operando de -5 a 5 volts, onde a variação de tensão define o sentido e a velocidade que será atingido pelo braço mecânico. No momento o controle das vibrações no elo flexível será feito mediante adição de massa na parte inicial do elo e com a rotação dos motores, que se opõe ao sentido do deslocamento causado pela vibração. Espera-se obter, em breve, resultados práticos compatíveis com os teóricos, embora haja várias limitações estruturais no modelo experimental.

#### 4 CONCLUSÕES E DISCUSSÕES

Neste trabalho é apresentada a descrição da posição do elemento terminal de um robô, em função das variáveis de junta, com respeito a um sistema de coordenadas de referência. Tais relações são de grande importância para a obtenção das relações entre a velocidade das juntas e as velocidades linear e angular do elemento terminal e para a obtenção das equações do movimento. A formulação Matemática é apresentada apenas para elos rígidos, embora já se tenha formulação para elos flexíveis. No trabalho propôs-se simulações experimentais, de controle de vibrações, as quais ainda estão em desenvolvimento. O modelo experimental é composto por um elo rígido e um flexível. Vale salientar que simulações experimentais geram imprevistos e nem sempre os resultados são iguais aos teóricos. Contudo modelos experimentais são fundamentais para a afirmação dos resultados teóricos. Em vista disto foi desenvolvida esta proposta de experimentação.

#### 5 REFERÊNCIAS

BOTTEGA, V., MOLTER, A., FONSECA, J. S. O., PERGHER, R., Vibration Control of Manipulators With Flexible Nonprismatic Links Using Piezoelectric Actuators And Sensors. **Mathematical Problems in Engineering**, Article ID 727385, vol. 2009, 2009.

LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações**, LTC, 1999.

MOLTER, A. **Controle de Manipuladores Robóticos Flexíveis Usando Atuadores e Sensores Piezelétricos Otimizados**. Tese de Doutorado, UFRGS/PROMEC, Porto Alegre, 2008.

MOLTER, A., SILVEIRA, O. A. A., FONSECA, J., BOTTEGA, V., Simultaneous Piezoelectric actuator and Sensor Placement Optimization and Control Design of Manipulators with Flexible Links Using SDRE Method, **Mathematical problems in Engineering**, Article ID 362437, vol. 2010, 2010.